

UNIVERSITY OF ROCHESTER LIBRARIES



3 9087 00081764 5

THE UNIVERSITY
OF ROCHESTER
LIBRARY



COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS

PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL

L'ANALYSIS SITUS

ET

LA GÉOMÉTRIE ALGÈBRIQUE

PAR

S. LEFSCHETZ



PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie}, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
55, Quai des Grands-Augustins, 55

—
1924

L'ANALYSIS SITUS

ET

LA GÉOMÉTRIE ALGÈBRE

Collection de monographies sur la Théorie des fonctions, publiée sous la direction d'ÉMILE BOREL, Membre de l'Institut. Volumes in-8 (25-16) se vendant séparément.

<i>Leçons sur la théorie des fonctions (Éléments et principes de la théorie des ensembles; applications à la théorie des fonctions)</i> , par ÉMILE BOREL, 2 ^e édition, 1914.....	15 fr.
<i>Leçons sur les fonctions entières</i> , par ÉMILE BOREL, 2 ^e édit., 1921.....	20 fr.
<i>Leçons sur les séries divergentes</i> , par E. BOREL; 1901.....	9 fr.
<i>Leçons sur les séries à termes positifs</i> , par E. BOREL; 1902 (réd. par R. d'Adhémar).....	7 fr.
<i>Leçons sur les fonctions méromorphes</i> , par E. BOREL; 1903 (réd. par L. Zoretti).....	7 fr.
<i>Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives</i> , par H. LEBESGUE; 1904.....	7 fr.
<i>Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynômes</i> , par E. BOREL; 1905 (réd. par M. Fréchet, Notes de P. Painlevé et H. Lebesgue).....	9 fr.
<i>Leçons sur les fonctions discontinues</i> , professées au Collège de France, par RENÉ BAIRE, rédigées par A. Denjoy; 1905.....	7 fr.
<i>Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions</i> , par ERNST LINDELÖF; 1905.....	7 fr.
<i>Leçons sur les séries trigonométriques</i> , professées au Collège de France, par HENRI LEBESGUE; 1906.....	7 fr.
<i>Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles de premier ordre</i> , professées au Collège de France par PIERRE BOUTROUX, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier; avec une Note de PAUL PAINLEVÉ; 1908.....	13 fr.
<i>Principes de la théorie des fonctions entières de genre infini</i> , par OTTO BLUMENTHAL; 1910.....	11 fr.
<i>Leçons sur la théorie de la croissance</i> , professées à la F ^{ac} des Sciences de Paris, par É. BOREL, recueillies et rédigées par A. Denjoy; 1910.....	11 fr.
<i>Leçons sur les séries de polynômes à une variable complexe</i> , par PAUL MONTEL; 1910.....	7 fr.
<i>Leçons sur le prolongement analytique</i> , professées au Collège de France, par LUDOVIC ZORETTI; 1911.....	7 fr. 50
<i>Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles</i> , professées à la F ^{ac} des Sciences de Rome en 1910, par VITO VOLTERRA et publiées par M. Tomassetti et F.-S. Zarlattì; 1913.....	11 fr.
<i>Leçons sur les singularités des fonctions analytiques</i> , professées à l'Université de Budapest, par PAUL DIENES; 1913.....	11 fr.
<i>Leçons sur les fonctions de lignes</i> , professées à la Sorbonne en 1911, par VITO VOLTERRA, recueillies et rédigées, par J. Perès; 1913.....	15 fr.
<i>Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues</i> ; par F. RIESZ; 1913.....	13 fr.
<i>Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes de Baire. Leçons professées au Collège de France, par G. DE LA VALLÉE POUSSIN, Professeur à l'Université de Louvain, Membre correspondant de l'Institut de France; 1916.....</i>	14 fr.
<i>Leçons sur les méthodes de Sturm dans la théorie des équations différentielles linéaires et leurs développements modernes</i> , professées à la Sorbonne en 1913-1914, par MAXIME BÔCHER, recueillies et rédigées par Gaston Julia; 1917.....	10 fr.
<i>Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe</i> , par ÉMILE BOREL, rédigées par G. Julia; 1917.....	15 fr.
<i>Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle</i> , par G. DE LA VALLÉE POUSSIN; 1919.....	16 fr.
<i>Leçons sur les fonctions automorphes</i> , par G. GIRAUD; 1920.....	13 fr.
<i>Leçons d'Analyse fonctionnelle</i> , par P. LÉVY; préface de J. Hadamard; 1922.....	35 fr.
<i>Méthodes et problèmes de théorie des fonctions</i> ; par Emile BOREL, 1922.....	12 fr.

263423

COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS

PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL.

L'ANALYSIS SITUS

ET

LA GÉOMÉTRIE ALGÈBRIQUE

PAR

solomon
S. LEFSCHETZ



PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie}, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés
dans tous pays.

PRÉFACE.

Les surfaces et les variétés algébriques accusent, au point de vue de l'*Analysis Situs*, des différences profondes avec les courbes, différences dues surtout à ce qu'elles ne sont pas les variétés bilatères les plus générales de leur dimension (quatre pour les surfaces, $2d$ pour les variétés à d dimensions). Effectivement elles contiennent des variétés topologiquement très particulières : leurs sections par d'autres surfaces ou variétés algébriques. Il est donc assez naturel d'en profiter pour l'étude de la variété elle-même, et de plus, de rechercher les propriétés spéciales qui en résultent. Après un Chapitre préliminaire, c'est là la tâche que nous avons poursuivie dans le second, le troisième et dans le début du cinquième. Dans les autres on trouvera diverses applications, notamment à la distribution des courbes des surfaces ou des hypersurfaces des variétés algébriques. C'est en effet, dans cette direction, que l'*Analysis Situs* se montre à son maximum d'utilité.

Parmi les divers écrits qui m'ont influencé pendant ce travail, sont à signaler tout particulièrement : les Mémoires de Poincaré sur l'*Analysis Situs* et sur la distribution des courbes d'une surface algébrique, les travaux de M. Picard, tels qu'ils sont exposés dans le Traité qu'il a écrit en collaboration avec M. Simart, enfin ceux des superbes géomètres de l'École italienne. Pour une bonne part, d'ailleurs, les résultats

exposés ici sont inédits quant à la forme ou au fond. Tel est notamment le cas, pour ceux relatifs aux intersections de cycles, qui paraissent ici pour la première fois.

Cette monographie est basée, en partie, sur une série de conférences faites à Rome, au printemps de 1921, sous les auspices de l'*Institute of International Education*, ainsi que sur les recherches poursuivies, un peu auparavant, sous ceux de l'*American Association for the Advancement of Science*.

Aux nombreux amis qui, des deux côtés de l'Atlantique, m'ont prodigué leur cordial encouragement, je tiens à exprimer ici ma grande reconnaissance. Enfin je veux remercier, d'abord M. Borel, pour m'avoir accordé l'honneur de paraître dans sa Collection, justement célèbre; ensuite la maison Gauthier-Villars, pour avoir bien voulu entreprendre la publication de mon Ouvrage, malgré ces temps si durs, où elle continue à maintenir son rang, hors pair, parmi les éditeurs scientifiques.



L'ANALYSIS SITUS

ET

LA GÉOMÉTRIE ALGÈBRIQUE

CHAPITRE I.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES VARIÉTÉS ANALYTIQUES.

I. — Premières définitions. Connexions des divers ordres ⁽¹⁾.

1. Deux variétés sont *homéomorphes*, si elles sont en correspondance biunivoque, continue, sans aucune exception. Tels sont deux segments de ligne, deux surfaces de Riemann de même genre, les régions de l'espace ordinaire limitées par un cube et une sphère, etc. L'*Analysis Situs* a pour but l'étude des propriétés des figures, préservées quand on les remplace par d'autres homéomorphes.

La cellule à n dimensions E_n est une variété homéomorphe à l'intérieur d'une hypersphère dans un espace à n dimensions, S_n . (Ces notations : E_n , S_n , reviendront constamment.) La frontière de E_n est la généralisation du circuit. En particulier, E_1 est un segment de ligne, E_2 une aire simplement connexe. Une variété à n dimensions est *homogène*, si deux E_n de la variété en conte-

(¹) Voir à ce sujet : PICARD et SIMART, *Traité des fonctions algébriques de deux variables*, vol. I, Chap. II, ainsi que les Mémoires de POINCARÉ, *Journal de l'École Polytechnique*, 2^e série, vol. I, 1895. — HEEGAARD, *Bulletin de la Société mathématique*, vol. XLIV, 1916. — TIETZE, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, vol. XIX, 1908. — VEULEN et ALEXANDER, *Annals of Math.*, 2^e série, vol. XIV, 1913. — Enfin l'ouvrage de M. VEULEN : *Analysis Situs, the Cambridge Colloquium, published by the American Mathematical Society*, New-York, 1922.

nant un point en ont toujours en commun une troisième le contenant également. Une courbe plane en forme de 8, un cône à deux nappes offrent des exemples de variétés qui ne le sont pas.

2. Les variétés analytiques, seules à être considérées ici, se définissent ainsi : Soient $x_1, x_2, \dots, x_{n'}$ un système de coordonnées cartésiennes, relatif à un $S_{n'}$ ($n' \geq n$), puis considérons les équations

$$(1) \quad x_i = \varphi(u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n'; n' \geq n),$$

où, dans le champ de variation des u , les φ sont des fonctions analytiques, à déterminants fonctionnels non tous nuls à la fois, enfin faisons le prolongement analytique des seconds membres, obtenant ainsi une série de nouveaux systèmes analogues, etc. A certains d'entre eux peuvent être adjointes des inégalités

$$\psi(u_1, u_2, \dots, u_n) > 0.$$

L'ensemble de points ainsi obtenu constitue une variété ou multiplicité *analytique* à n dimensions, M_n , dans un $S_{n'}$.

Pour permettre de considérer aussi des points à l'infini, nous introduirons des multiplicités définies en partie par des systèmes d'équations tels que (1), en partie par d'autres tels que

$$x_i = \varphi_i(u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n_1),$$

$$\frac{1}{x_j} = \varphi_j(u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (j = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n'),$$

où les φ ont les mêmes propriétés qu'avant.

On n'exclut pas la possibilité que les variables prennent des valeurs complexes. Seulement il suffira alors que $n' \geq n$.

En changeant une des inégalités en égalité on obtient une *frontière* de M_n . Nous admettrons que les frontières se composent d'une ou plusieurs variétés analytiques à $n - 1$ dimensions, $M_{n-1}^{(1)}$.

3. Orientation des variétés. — La notion familière des deux

(1) Voir la Note de M. Hadamard à la fin de l'*Introduction à la théorie des fonctions* de Jules Tannery.

sens distincts que l'on peut attribuer à un segment de courbe s'étend aux variétés *bilatères*. Soit d'abord une E_n en forme de pyramide généralisée, $P_n = A_1 A_2 \dots A_{n+1}$, à faces non nécessairement planes. P_n correspond à la pyramide à faces planes comme par exemple le triangle sphérique au triangle ordinaire. Supposons que l'on nomme ses sommets dans l'ordre $i, j, \dots, k$. Nous dirons que P_n n'a pas changé ou bien qu'elle est invertie suivant que le nombre de transpositions dans la permutation

$$\begin{pmatrix} 1, 2, \dots, n+1 \\ i, j, \dots, k \end{pmatrix}$$

est pair ou impair. La pyramide invertie sera désignée par $-P_n$. Ceci généralise de manière évidente les notions familières pour $n = 1, 2$, où P_n devient un segment ou un triangle.

Traçons maintenant dans une M_n quelconque une petite P_n . Est-il possible de faire décrire à un point intérieur à P_n un petit circuit de manière à ramener P_n à $-P_n$? Si oui M_n est *unilatère*, si non *bilatère*. Toute M_1 est bilatère, mais il existe des M_2 unilatères et le feuillet unilatère de Möbius est bien connu.

La petite P_n est appelée *indicatrice* de M_n . A l'ensemble ($M_n +$ indicatrice) on peut attacher un sens ou signe et l'on convient qu'en changeant l'orientation de l'indicatrice on remplace M_n par $-M_n$. Une fois M_n orientée on définit le sens d'une frontière M_{n-1}^i comme ceci : On amène P_n au contact avec M_{n-1}^i de façon que la $P_{n-1} \triangleq A_2 A_3 \dots A_{n+1}$ soit dans M_{n-1}^i dont elle deviendra par définition une indicatrice.

Remarque. — On peut aussi définir une orientation de M_n par les signes des déterminants fonctionnels des φ (Poincaré). Les deux définitions sont équivalentes ⁽¹⁾.

4. Congruences, homologies. — La relation entre M_n et ses frontières orientées sera exprimée par une *congruence*

$$M_n \equiv \sum M_{n-1}^i$$

⁽¹⁾ Voir l'article de M. Heegaard cité plus haut.

ou en particulier quand M_n est fermée (sans frontières)

$$M_n \equiv 0.$$

Lorsqu'il s'agit simplement d'exprimer que les M_{n-1}^i forment la frontière totale d'une M_n quelconque dans une $M_{n'}$, on écrira une *homologie*

$$\sum M_{n-1}^i \sim 0 \pmod{M_{n'}},$$

en omettant toutefois la mention $\pmod{M_{n'}}$ quand il n'y aura pas d'équivoque possible

Ces notations et presque toutes les définitions remontent à Poincaré. L'emploi du signe $\equiv$ peut prêter à objection, car la relation qu'il exprime n'est pas transitive. Il n'en est pas moins fort commode et l'on verra qu'il ne cause guère de confusion.

5. Le terme *multiplicité* sera étendu à une somme de multiplicités du type défini plus haut, les frontières étant alors par définition les sommes des frontières. On attribue ainsi un sens à une multiplicité

$$\sum_i \lambda_i M_n^i \quad (\lambda_i \text{ entier}).$$

Grâce à cette convention on peut faire subir aux congruences et aux homologies l'addition, la multiplication par un entier, et *aux congruences seules* la division par un facteur entier commun à tous les coefficients. Ce dernier point se démontre ainsi : la congruence

$$(2) \quad \lambda \sum \lambda_i M_n^i \equiv \lambda \sum \mu_s M_{n-1}^s$$

provient de congruences que l'on multiplie par des entiers $\lambda \lambda_i$. Si l'on se contentait de multiplier par les λ_i , on obtiendrait précisément (2) avec le facteur λ supprimé.

Déplacements. — Nous avons eu l'occasion d'employer des déplacements (n° 3). Les seuls déplacements d'une M_k de type restreint que nous considérerons à l'avenir seront ceux exprimables par des équations analytiques. Leur effet sur M_k sera de lui faire engendrer des M_{k+1} . Soit en particulier $M_k \equiv M_{k-1}$ et supposons

qu'en vertu d'un déplacement durant lequel les deux multiplicités en engendrent d'autres M'_{k+1} , M'_k , la première soit amenée en M''_k . Évidemment

$$M'_{k+1} \equiv M''_k - M_k + M'_k.$$

Par suite, en supposant toutes les multiplicités contenues dans M_n ,

$$M''_k - M_k + M'_k \sim 0 \pmod{M_n}.$$

En particulier, si M_k est fermée, ses positions extrêmes sont homologues.

6. Cycles. Connexions des divers ordres. — Dorénavant nous prendrons pour base de nos considérations une variété à n dimensions W_n , fermée, homogène, bilatère. Les M_k fermées qu'elle contient sont ses *cycles* à k dimensions. Le cycle est *linéaire* si $k = 1$, nul si $M_k \sim 0$. Plusieurs cycles à k dimensions sont *indépendants* ou *distincts* s'ils ne satisfont à aucune homologie, c'est-à-dire s'il n'y en a pas de combinaison linéaire formant la frontière complète d'une M_{k+1} . Le maximum R_k (fini) de cycles à k dimensions distincts est l'*indice de connexion* à k dimensions de W_n . Les cycles à k dimensions seront en général désignés par la notation Γ_k , des indices supérieurs servant à les distinguer quand il y en a plusieurs. D'après le n° 5, quand on déplace un cycle il reste homologue à lui-même.

Diviseurs de zéro, torsion. — W_n peut posséder des Γ_k tels que $\lambda \Gamma_k \sim 0$ pour $\lambda > 1$ sans que $\Gamma_k \sim 0$. Le cycle est dit alors *diviseur de zéro* à k dimensions, ou plus simplement, diviseur à k dimensions. Le nombre σ_k de ces diviseurs est fini; l'entier σ_k est l'*indice de torsion* à k dimensions. Raisonnant comme M. Severi dans un cas entièrement semblable relatif aux courbes d'une surface algébrique, considérons $+\Gamma_k$ comme une opération à effectuer sur les cycles de sa dimension. En ce sens les opérations relatives aux diviseurs engendrent un groupe abélien fini G_k dont σ_k est l'ordre; c'est le *groupe de la torsion* à k dimensions. G_k possède un certain nombre ζ_k d'opérations formant base, soient $\Gamma_k^1, \Gamma_k^2, \dots, \Gamma_k^{\zeta_k}$, c'est-à-dire telles que toute autre soit de la forme

$$\lambda_1 \Gamma_k^1 + \lambda_2 \Gamma_k^2 + \dots + \lambda_{\zeta_k} \Gamma_k^{\zeta_k} \quad (\lambda_i \text{ entier}).$$

Les ordres t_1, t_2, t_{ζ_k} des opérations de la base sont les *coefficients de torsion* de Poincaré ⁽¹⁾, et l'on a $\sigma_k = t_1 t_2 \dots t_{\zeta_k}$. Le terme *torsion* provient de ce que la présence des diviseurs entraîne une sorte de torsion interne de la variété (Poincaré).

Remarque. — Les entiers $R_k, \zeta_k, \sigma_k, t_i$ sont tous invariants par rapport à l'homéomorphisme.

7. Systèmes fondamentaux de cycles. — Soit $\Gamma_k^1, \Gamma_k^2, \dots, \Gamma_k^r$ un système fondamental pour les Γ_k , c'est-à-dire tel que tout cycle

$$(3) \quad \Gamma_k \sim \sum \lambda_i \Gamma_k^i.$$

L'existence d'un tel système est une conséquence de ce que, R_k étant fini, entre $R_k + 1$ cycles Γ_k quelconques il y a toujours une homologie. D'ailleurs nous le vérifierons directement pour les variétés algébriques.

Les Γ_k satisfont à $r - R_k$ homologies

$$(4) \quad t_{h1} \Gamma_k^1 + t_{h2} \Gamma_k^2 + \dots + t_{hr} \Gamma_k^r \sim 0 \quad (h = 1, 2, \dots, r - R_k).$$

Considérons maintenant des cycles $\bar{\Gamma}_k^1, \bar{\Gamma}_k^2, \dots, \bar{\Gamma}_k^r$, tels que

$$(5) \quad \Gamma_k^i \sim \sum_h a_{ih} \bar{\Gamma}_k^h \quad (i = 1, 2, \dots, r),$$

le déterminant des a_{ih} étant ± 1 , de sorte que leur matrice A définit ce que l'on nomme une transformation *unimodulaire*. Les $\bar{\Gamma}$ constituent un nouveau système fondamental. Au lieu de (4), ils satisferont à un certain système (4'). On peut d'ailleurs remplacer (4') par tout autre système (4'') obtenu en appliquant à ses premiers membres une transformation unimodulaire B . Or, d'après Frobenius ⁽²⁾, pour un choix convenable de A, B , (4'') sera de la forme

$$(4'') \quad t_k \bar{\Gamma}_k^{R+h} \sim 0 \quad (h = 1, 2, \dots, r - R_k).$$

Parmi les $\bar{\Gamma}$ on peut supprimer les cycles nuls, ce qui revient à

⁽¹⁾ *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1900.

⁽²⁾ Le calcul est le même que pour les formes bilinéaires diophantines. (Voir E. CAHEN, *Théorie des nombres*, t. I. p. 269.)

supposer que les t sont tous > 1 . Ces entiers ne sont autres alors que les coefficients de torsion et les $\bar{\Gamma}^{R_k+h}$ forment une *base* pour le groupe G_k , ou si l'on veut, pour les diviseurs Γ_k . On aura alors $r = R_k + \zeta_k$ ($r = R_k$ s'il n'y a pas de diviseurs). Quand on ne s'inquiète pas d'avoir le plus petit nombre possible de cycles dans le système fondamental, on peut en prendre un composé de R_k cycles indépendants associés à $\sigma_k - 1$ diviseurs ⁽¹⁾.

REMARQUE. — *Si les cycles d'un système fondamental sont indépendants, $\sigma_k = 1$.*

En effet il n'y a pas alors de diviseurs proprement dits, car de

$$\Gamma_k \sim \sum \lambda_i \Gamma_k^i, \quad t \Gamma_k \sim 0, \quad t > 1,$$

on tire successivement

$$\sum t \lambda_i \Gamma_k^i \sim 0, \quad t \lambda_i = 0 = \lambda_i, \quad \Gamma_k \sim 0.$$

Ceci se présente en particulier pour les W_2 , puisque leurs rétrosections constituent un système fondamental à la propriété requise.

8. Rappel des théorèmes principaux de Poincaré. — Relativement à nos W_n il a démontré ces propriétés fondamentales, que nous allons retrouver en faisant l'étude des variétés algébriques.

I. *Les R_k équidistants des extrêmes sont égaux, c'est-à-dire $R_k = R_{n-k}$.*

II. *Le groupe de torsion G_{n-1} se réduit à l'identité. Les groupes G_k, G_{n-1-k} sont isomorphes ⁽²⁾.*

W_n étant analytique, tout point en sera contenu dans une cellule E_n de frontière analytique, donc d'après un théorème classique (Borel), il y aura un nombre fini de E_n recouvrant W_n tout entière. Ces cellules peuvent se recouvrir partiellement, mais (on

⁽¹⁾ De cette discussion résulte aisément que tout système fondamental peut être dérivé de celui des $\bar{\Gamma}_k$, donc d'un quelconque d'entre eux, par une transformation unimodulaire.

⁽²⁾ Ici, comme à l'avenir, il sera entendu que l'isomorphisme est holoédrique.

le démontre aisément, et en tout cas nous l'admettrons ici) W_n peut être subdivisée en cellules sans points internes communs, les frontières étant elles-mêmes composées de cellules E_{n-1} , aux mêmes propriétés, etc. C'est ce qu'on appelle *réduire* W_n à un *polyèdre généralisé*. Le polyèdre possédera un certain nombre α_i de cellules E_i . Poincaré a démontré une formule, généralisation d'un résultat classique d'Euler, qui, avec la convention $R_0 = R_n = 1$ adoptée pour la suite, se met sous la forme très simple

$$\text{III.} \quad \sum (-1)^i \alpha_i = \sum (-1)^i R_i.$$

Poincaré a d'ailleurs démontré une formule analogue pour les variétés unilatères, mais nous ne nous y arrêterons pas.

9. Quelques modèles de variétés. — On sait que pour $n > 2$ on n'a pas réussi jusqu'à présent à obtenir de modèle type pour les W_n , analogue, par exemple, au disque troué de Clifford pour les surfaces bilatères. Il est par suite fort utile de considérer des exemples particuliers pour obtenir une idée des circonstances variées qui peuvent se présenter. C'est ainsi que Poincaré en a étudié plusieurs dans son premier Mémoire ⁽¹⁾.

Commençons par un type simple dû à M. Volterra. Dans un espace à n dimensions S_n , prenons une hypersphère en contenant à son intérieur k autres, extérieures les unes aux autres, et soit T la partie de S_n limitée par toutes les hypersphères. Prenons le symétrique T' de T par rapport à un hyperplan ne coupant pas T . Enfin faisons coïncider, par exemple à l'aide d'une déformation dans un $S_{n'}$, ($n' > n$), les points correspondants des frontières de T et T' . On obtient ainsi une W_n avec, comme on le vérifie aisément, $R_1 = R_{n-1} = k$. Ceci démontre que *la connexion linéaire d'une W_n peut être égale à un entier quelconque*.

Prenons en particulier $n=3$, $k=2$, et les sphères qui limitent T dans S_3 (espace ordinaire), concentriques. Soit P le plan de symétrie considéré ci-dessus, et par le centre commun des deux sphères, passons un plan Q perpendiculaire à P . Opérons maintenant comme précédemment sur l'ensemble $T+T'$ en rem-

(1) Voir la planche et la Note II à la fin de l'ouvrage.

plaçant toutefois P , en tant que plan de symétrie, par le plan Q . On vérifie aisément qu'une variété homéomorphe à W_3 peut être construite en remplaçant partout T par l'espace intérieur à un tore (Volterra).

10. Indiquons maintenant un modèle, intéressant surtout, car c'est le plus simple à nombre σ , quelconque. Il remonte au fond à Poincaré. Soient T, T' deux tores, S, S' leurs espaces intérieurs, a, b les circuits méridien et parallèle de T , a', b' ceux de T' . Rendons T simplement connexe par les coupures usuelles suivant a et b ; puis faisons-en autant pour T' , mais cette fois avec des coupures b' et $a'_1 = kb' + a'$. Le circuit a'_1 doit être tracé de manière à ne pas avoir de points doubles et à ne couper b' qu'en un seul point, conditions faciles à remplir. Les deux cellules E_2 ainsi obtenues ont toutes deux quatre frontières dans la même situation relative. On peut donc établir entre elles un homéomorphisme faisant correspondre a'_1 à a et b' à b . Faisons coïncider chaque point de T avec le point correspondant de T' . On aura ainsi dérivé de $S + S'$ une certaine W_3 . Pour avoir toutes les homologies entre ses cycles linéaires, il faut ajouter aux homologies fondamentales déjà existantes pour S, S' , $a \sim 0, a' \sim 0$ (et il n'y en a pas d'autres), l'homologie $a' + kb' - a \sim 0$ résultant de l'homéomorphisme. Les cycles linéaires de W_3 sont tous des combinaisons des cycles a, a', b' , aux trois homologies fondamentales que nous venons d'écrire. Donc $kb' \sim 0$ sans que $b' \sim 0$, c'est-à-dire k est un coefficient de torsion et, comme il n'y en a pas d'autres, G_1 est un groupe cyclique d'ordre $\sigma_1 = k$ entier quelconque.

11. L'anneau à n dimensions et ses cycles. — Prenons le cube à n dimensions U_n , ou solide défini par les relations

$$0 \leq x_i \leq 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

et déformons-le dans un S_{n+1} de manière à en faire coïncider les faces parallèles de chaque dimension. La W_n que l'on obtient ainsi est l'anneau à n dimensions. Cette construction généralise de manière évidente celle du tore à partir du carré.

Pour trouver les valeurs de R_k, σ_k , nous nous appuyerons sur ce lemme :

Dans une cellule E_n toute M_k de frontière dans celle W_{n-1} de E_n peut être réduite par déformation à W_{n-1} sans changement de frontière.

En effet prenons pour E_n l'intérieur d'une hypersphère, puis, s'il le faut, déformons légèrement M_k de façon qu'elle ne passe pas par le centre. Il suffira alors de faire glisser M_k le long des rayons pour arriver au résultat voulu.

L'application à l'anneau est immédiate. Les seuls cycles à considérer sont ceux provenant des faces de U_n . Les faces parallèles à k dimensions donnent lieu à des Γ_k homologues, et il n'y a pas d'autres homologues entre les Γ_k que celles exprimant ce fait. Donc tout Γ_k est homologue à une somme de multiples des $\binom{n}{k}$ cycles dérivés d'un système de faces non parallèles. Par suite, ces derniers cycles constituent un système fondamental. Comme ils sont indépendants, $R_k = \binom{n}{k}$, $\sigma_k = 1$. Les groupes de torsion se réduisent tous ici à l'identité.

II. — Intersection des variétés.

12. Considérons dans W_n deux multiplicités du type restreint du n° 2, M_h, M_k , se coupant suivant une M_l du même type, avec $l = h + k - n$. Soit A_1 un point quelconque de M_l et donnons-nous les indicatrices en A_1 ,

$$P_l = A_1 A_2 \dots A_{l+1}, \quad P_h = A_1 A_2 \dots A_{l+1} A_{l+2} \dots A_{h+1},$$

$$P_k = A_1 A_2 \dots A_{l+1} A_{h+2} \dots A_{n+1}.$$

Nous dirons que M_h et M_k se coupent suivant $+M_l$ ou $-M_l$ suivant que

$$P_n = A_1 A_2 \dots A_{n+1}$$

est, ou bien n'est pas, une indicatrice de W_n . Cette intersection orientée sera désignée par $M_h M_k$. Si M_h et M_k se coupent suivant

plusieurs variétés M_l^i , chacune orientée *ad libitum*, on écrira

$$M_h M_k = \sum + M_l^i,$$

les signes étant déterminés comme avant. On vérifie de suite que

$$M_k M_h = (-1)^{(n-h)(n-k)} M_h M_k,$$

Pour $l=0$, donc $k=n-h$, on considérera les points M_0^i comme constituant leurs propres indicatrices P_0 ; à part cela, rien ne sera changé. Supposons, en particulier, qu'il y ait q' de ces points affectés du signe $+$, q'' affectés du signe $-$. Nous nommerons la différence $q' - q''$ *nombre algébrique de points d'intersection de M_h avec M_k* , par opposition au nombre ordinaire, ou nombre *arithmétique* $q' + q''$. Le nombre $q' - q''$ sera désigné par la notation $(M_h M_k)$. Dorénavant, sauf avis contraire, c'est toujours du premier qu'il s'agira. Ce nombre est destiné à jouer un rôle des plus importants dans la suite.

Relevons en particulier les relations suivantes :

$$(M_h M_{n-h}) = (-1)^h (M_{n-h} M_h) \quad (n \text{ pair});$$

$$(M_h M_{n-h}) = (M_{n-h} M_h) \quad (n \text{ impair}).$$

La considération des nombres algébriques de points d'intersection remonte à Kronecker et à Poincaré ⁽¹⁾.

13. Au fond, nous venons de définir une relation entre les quatre variétés M_h , M_k , M_l , W_n , en vertu de laquelle l'orientation de l'une est déterminée par celle des trois autres. Un exemple bien connu d'une telle situation est celui de la détermination d'un sens sur la normale à une surface dans l'espace ordinaire, quand la surface et l'espace ont été orientés de manière définie.

Remarques. — I. Dans toute la discussion, on a supposé implicitement que, quand A_i se déplace sur l'intersection M_l , P_n ne cesse jamais d'être une indicatrice de W_n . Ceci pourrait fort bien se produire en certains points exceptionnels de M_l ; mais puisque cela n'aura lieu dans aucune de nos applications, il est inutile de nous en préoccuper.

(1) HADAMARD, *loc. cit.*

II. L'extension de tout ce qui précède à l'intersection de deux variétés de type non restreint, ou bien à celle de plusieurs variétés est immédiate.

14. A l'aide des indicatrices on démontre aisément ces deux théorèmes, d'ailleurs intuitivement vrais :

I. *L'intersection de la frontière de M_h avec M_k , fermée, de type restreint, est, au signe près, frontière de l'intersection.* Le signe ne dépend d'ailleurs que des dimensions.

II. *Pour trouver l'intersection de deux variétés, on peut remplacer l'une d'elles par son intersection avec une variété W' contenue dans W_n et analogue à elle.* Ainsi, symboliquement, W' passant par M_k ,

$$M_h M_k = \pm M_h (W' M_k).$$

Le signe ne dépend que de l'orientation de W' , et à droite, en prenant l'intersection, on considère les deux variétés comme contenues dans W' .

Remarque. — Nous avons ici un cas où il serait opportun d'indiquer la variété où sont placées celles dont on étudie l'intersection. Dans la pratique, on la déterminera aisément par la condition $n = h + k - 1$ qui relie les dimensions. Il semble préférable d'éviter de multiplier les notations, même au prix de légères équivoques.

15. De I, on déduit ce résultat d'une importance capitale :

THÉORÈME. — *Si $\Gamma_h \sim 0$, aussi $\Gamma_h \Gamma_k \sim 0$, quel que soit Γ_k . En particulier si $k = n - h$, le nombre $(\Gamma_h \Gamma_{n-h}) = 0$, quel que soit Γ_{n-h} .*

COROLLAIRE. — *Les cycles $\Gamma_h \Gamma_k$, ou les nombres $(\Gamma_h \Gamma_{n-h})$, sont invariants par rapport à l'homologie, c'est-à-dire quand on remplace les cycles par d'autres homologues.*

On verra combien tout ceci est important dans toutes les applications aux variétés algébriques. A titre d'exemple, soit Γ_1 un cycle nul d'une W_2 . On aura $(\Gamma_1 \Gamma'_1) = 0$ pour tout cycle

linéaire Γ'_1 . Géométriquement, cela signifie que des deux régions en lesquelles Γ_1 décompose W_2 , Γ'_1 , passe autant de fois de la première dans la deuxième que de la deuxième dans la première.

Remarque. — Il est bien entendu que l'on ne considère jamais que des cycles se coupant exactement suivant un autre de la dimension voulue. Si cette condition n'est pas remplie, il suffira de déformer légèrement un des cycles pour qu'elle le devienne.

III. — Intersection des cycles des systèmes fondamentaux. Étude de certains invariants qui s'y rattachent.

16. Soient $\Gamma^1_k, \Gamma^2_k, \dots, \Gamma^q_k$ et $\Gamma^1_{n-k}, \Gamma^2_{n-k}, \dots, \Gamma^r_{n-k}$, deux systèmes fondamentaux pour les cycles de leurs dimensions. Γ_k, Γ_{n-k} étant quelconques, on aura

$$\Gamma_k \sim \sum x_i \Gamma^i_k, \quad \Gamma_{n-k} \sim \sum y_j \Gamma^j_{n-k}.$$

Par suite, grâce à la relation évidente,

$$((M'_k + M''_k) M_{n-k}) = (M'_k M_{n-k}) + (M''_k M_{n-k}),$$

on obtient

$$(6) \quad (\Gamma_k \Gamma_{n-k}) = \sum (\Gamma^i_k \Gamma^j_{n-k}) x_i y_j.$$

Ainsi, à chaque paire d'indices complémentaires, $k, n-k$, on peut rattacher une certaine forme bilinéaire à coefficients entiers, par laquelle s'expriment les nombres $(\Gamma_k \Gamma_{n-k})$ dès que l'on sait comment les cycles dépendent de leurs systèmes fondamentaux.

17. Prenons maintenant deux nouveaux systèmes fondamentaux, $\bar{\Gamma}^i_k, \bar{\Gamma}^j_{n-k}$. Il y aura des relations

$$(7) \quad \bar{\Gamma}^i_k \sim \sum^s a_{is} \Gamma^s_k, \quad \bar{\Gamma}^j_{n-k} \sim \sum b_{jt} \Gamma^t_{n-k}.$$

D'ailleurs évidemment

$$(8) \quad (\Gamma_k \Gamma_{n-k}) = \sum (\bar{\Gamma}_k^i \bar{\Gamma}_{n-k}^j) x'_i y'_j, \\ \Gamma_k \sim \sum x'_i \bar{\Gamma}_k^i, \quad \Gamma_{n-k} \sim \sum y'_j \bar{\Gamma}_{n-k}^j.$$

Désignons par A, B, les matrices aux coefficients a, b , des homologues (7), par $\bar{B}$ la transposée de B, c'est-à-dire la matrice obtenue en y permutant les lignes et les colonnes. On tire des équations

$$(\bar{\Gamma}_k^i \bar{\Gamma}_{n-k}^j) = \sum_{s,t} a_{is} b_{jt} (\Gamma_k^s \Gamma_{n-k}^t)$$

la relation symbolique entre matrices

$$\| (\bar{\Gamma}_k^i \bar{\Gamma}_{n-k}^j) \| = A \| (\Gamma_k^i \Gamma_{n-k}^j) \| \bar{B}.$$

Ceci montre que l'on peut passer de (6) à (8) par un changement de variables à coefficients entiers. Mais il est évident que l'on peut passer de la même manière de (8) à (6). Donc, Frobenius ⁽¹⁾, les deux formes bilinéaires ont même diviseur élémentaire $e_1, e_2, \dots, e_f$, et même rang f . On peut aussi énoncer ce résultat en remplaçant les formes par les matrices. Ces diviseurs élémentaires sont des *invariants* de W_n par rapport à l'homéomorphisme, au même titre que les nombres R_k, σ_k, t_i .

Remarquons que, A étant unimodulaire quelconque, les $\bar{\Gamma}_k^i$, définis par les homologues (7) comme plus haut, constituent toujours un système fondamental. En effet, on peut exprimer les Γ_k^i en termes des $\bar{\Gamma}_k^i$, donc tout Γ_k en termes de ces cycles. Une remarque analogue s'applique pour B et les $\bar{\Gamma}_{n-k}^j$. Avec un choix de A, B, ou si l'on veut, avec des systèmes fondamentaux convenables, on pourra réduire (6) à la forme

$$\sum e_i x_i y_i.$$

Nous dirons alors que les systèmes fondamentaux sont *canoniques*. Supposons que ceux dont nous sommes partis le soient déjà. On

(1) E. CAHEN, *loc. cit.*, p. 273. Le rang d'une matrice est l'ordre maximum d'un déterminant non nul que l'on en peut tirer. Le rang d'une forme bilinéaire est celui de sa matrice aux coefficients.

aura

$$(\Gamma_k^i \Gamma_{n-k}^i) = e_i \quad (i \leq f);$$

$$(\Gamma_k^i \Gamma_{n-k}^j) = 0 \quad (i \neq j \text{ ou bien } i = j > f).$$

De

$$(\Gamma_k \Gamma_{n-k}) = \sum_i e_i x_i y_i,$$

on tire

$$(\Gamma_k^i \Gamma_{n-k}) = e_i y_i; \quad (\Gamma_k \Gamma_{n-k}^i) = e_i x_i;$$

Donc

$$(\Gamma_k^i \Gamma_{n-k}) = (\Gamma_k \Gamma_{n-k}^i) \equiv 0 \pmod{e_i}.$$

Ainsi, propriété caractéristique des systèmes fondamentaux canoniques, *leurs cycles coupent ceux de dimension complémentaire en un nombre de points divisible par un entier bien défini.*

18. Voici un théorème général pour les nombres de points d'intersection des cycles :

Si $(\Gamma_k \Gamma_{n-k}) = 0$ quel que soit Γ_{n-k} , Γ_k est un cycle nul ou un diviseur de zéro.

Ce théorème est fort probablement vrai pour toute W_n quoiqu'on n'en connaisse pas de démonstration générale. Nous en donnerons une pour les surfaces et les variétés algébriques. En se basant sur lui, on montre aisément que $f = R_k$. En effet, on en déduit que Γ_k^{f+i} est nul ou diviseur de zéro, puisque

$$(\Gamma_k^{f+i} \Gamma_{n-k}) = y_{f+i} (\Gamma_k^{f+i} \Gamma_{n-k}^{f+i}) = 0, \quad \Gamma_{n-k} \sim \sum y_i \Gamma_{n-k}^i.$$

D'un autre côté, de

$$\sum_i \lambda_i \Gamma_k^i \sim 0,$$

on tirerait, en considérant l'intersection avec Γ_{n-k}^i ,

$$\lambda_i (\Gamma_k^i \Gamma_{n-k}^i) = \lambda_i e_i = 0, \quad \text{d'où} \quad \lambda_i = 0.$$

Les cycles Γ_k^i ($i \leq f$) sont donc indépendants. Enfin Γ_k , arbitraire, dépend des cycles du système fondamental, donc des Γ_k^i ($i \leq f$). Par suite, f est le nombre maximum de Γ_k distincts, d'où $f = R_k$.

Le même raisonnement donne $f = R_{n-k}$, donc $R_k = R_{n-k}$. Toutefois, ceci ne constitue qu'une vérification de la relation de Poincaré, car pour démontrer la propriété admise comme point de départ nous emploierons cette relation même.

19. Revenons aux nombres e_i . Pour $k = 1$ ou $n - 1$, pour les variétés algébriques à d dimensions et $k = 2$ ou $2d - 2$, les e_i sont égaux à 1. En particulier, pour les surfaces algébriques ces entiers sont tous égaux à 1 ⁽¹⁾.

Pour démontrer ce théorème relativement à la valeur k , il suffit d'établir que si $(\Gamma_k^i, \Gamma_{n-k}^i)$ est divisible par e_i quel que soit Γ_{n-k}^i , Γ_k^i est, à un diviseur de zéro près, le multiple d'un certain cycle. En effet, il en résultera que ce dernier n'est pas exprimable en termes du système fondamental canonique, contradiction qui démontrera le théorème. Nous ne traiterons pas le cas d'une W_n générale et de ses cycles Γ_1, Γ_{n-1} . Les autres seront discutés aux Chapitres III et V.

Remarquons que pour une W_2 les théorèmes de ce numéro et du précédent s'établissent de suite. En effet, soient $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2p}$ des rétrosections de Riemann de la surface, et supposons, comme nous le ferons toujours dans la suite, que γ_i et γ_{p+i} soient associées, de sorte que

$$(\gamma_i \gamma_{p+i}) = 1, \quad (\gamma_i \gamma_k) = 0 \quad (i \neq p \pm k).$$

Pour tout Γ_1 on peut écrire

$$\Gamma_1 \sim \sum \lambda_i \gamma_i$$

et s'il coupe tout autre en un nombre nul de points,

$$(\Gamma_1 \gamma_i) = \mp \lambda_{i \pm p} = 0,$$

donc $\Gamma_1 \sim 0$. Enfin prenant pour systèmes fondamentaux associés $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2p}$, et $\gamma_{p+1}, \gamma_{p+2}, \dots, \gamma_{2p}$, — γ_1 , — γ_2 , ..., — γ_p , on aura bien

$$(\Gamma_h^i \Gamma_{n-h}^i) = 1, \quad (\Gamma_h^i \Gamma_{n-h}^j) = 0 \quad (i \neq j).$$

⁽¹⁾ Pendant la correction des épreuves j'ai appris de M. Veblen qu'il a réussi à démontrer que les e_i sont tous égaux à l'unité *quelle que soit* W_n . En vertu de ce résultat fort remarquable ils ne constitueraient pas des invariants topologiques nouveaux.

CHAPITRE II.

SURFACES ALGÈBRIQUES. ÉTUDE APPROFONDIE DES CYCLES
D'UNE COURBE VARIABLE DANS UN FAISCEAU LINÉAIRE.

I. — Généralités sur les surfaces algébriques.

1. La surface algébrique est le lieu des points d'un espace à trois dimensions complexes dont les coordonnées satisfont à une équation

$$f(x, y, z) = 0,$$

où f est un polynôme. Nous la désignerons par la notation V_2 , et nous la supposerons irréductible et en position générale par rapport aux axes et à l'infini. L'ensemble de points qui constitue V_2 est à quatre dimensions réelles; sa représentation correcte est à l'aide d'une W_4 . Il est entendu qu'à l'avenir V_2 dénotera indifféremment la surface ou bien la W_4 qui la représente. De même par *courbe algébrique de V_2* , on entendra indifféremment la courbe en tant qu'entité de points satisfaisant à l'équation de la surface, ou bien la W_2 qui lui correspond dans la W_4 .

2. Systèmes linéaires. Rappel de quelques notions simples. — Un système linéaire de surfaces découpe sur V_2 un *système linéaire de courbes*, et si C en est la courbe générique, on le désigne par $|C|$. Le nombre r de paramètres dont C dépend est la *dimension* du système. Le *faisceau linéaire* est un système à un paramètre. En particulier un faisceau linéaire contenu dans $|C|$ et dont la courbe générique dépend du paramètre u sera désigné par $\{C_u\}$. Les courbes C pourraient être astreintes à passer par des points fixes donnés et à s'y comporter de manière voulue. Ces points sont les *points-bases* de $|C|$.

3. La surface V_2 n'est pas nécessairement homogène en tant que W_4 . Pour qu'il en soit ainsi il faut que ses singularités soient de nature relativement simple. Pour éviter les complications, nous supposons *la surface non singulière, ou bien la projection d'une surface V'_2 non singulière située dans un espace de dimension > 3* . V'_2 est nécessairement homogène, donc V_2 , qui lui est homéomorphe, le sera aussi. Les singularités de V_2 consisteront alors uniquement en une courbe double, à nombre fini de points triples (à la fois pour la surface et la courbe) et de points pincés, ou points où les plans tangents le long de la courbe double coïncident. Toute V_2 de cette nature est la projection d'une surface non singulière, donc homogène. Enfin théorème fort intéressant : *Toute surface algébrique est la transformée birationnelle d'une surface non singulière située dans un espace convenable* (Beppo Levi, Chisini).

4. *La surface V_2 est bilatère.* En effet, soit m le degré de $f(x, y, z)$ en z . On peut étendre à V_2 la représentation d'une courbe algébrique par un plan recouvert de feuillets. Ici il faudra recouvrir de m feuillets l'espace réel S_4 image des valeurs complexes x, y . Ces feuillets devront être rejoints le long de la projection de la courbe simple commune aux surfaces $f=0, f'_z=0$, projection représentée dans S_4 par une W_2 . On pourra toujours choisir les axes de façon que la projection d'un circuit donné ζ de V_2 ne rencontre pas cette W_2 . Il suffira pour cela qu'aucune droite parallèle à l'axe des z et rencontrant ζ ne soit tangente à V_2 .

Supposons en particulier que ζ invertisse une indicatrice de V_2 . Sa projection dans S_4 fournit un circuit γ invertissant une indicatrice aussi. Par déformation on en déduit un circuit fini à la même propriété, et l'on montre aisément que cela est impossible.

5. *Les surfaces algébriques sont-elles topologiquement aussi générales que possible?* Autrement dit, existe-t-il une V_2 homéomorphe à toute W_4 ? La réponse ici est négative, contrairement à ce qui a lieu dans le cas analogue des courbes algébriques. Nous verrons en effet que l'indice R_1 de toute V_2 est nécessairement pair, tandis que pour une W_4 générale il peut avoir une valeur quelconque (Chap. I, n° 9).

Ce qui distingue les surfaces algébriques, c'est la présence des cycles *algébriques*, ou cycles Γ_2 formés par leurs courbes algébriques ⁽¹⁾. Les propriétés topologiques spéciales que nous allons obtenir reposent en entier sur l'existence d'un système de Γ_2 se conduisant comme les courbes d'un système linéaire irréductible. Elles appartiendraient donc à toute W_4 en possédant un. Nous pouvons maintenant énoncer notre problème.

PROBLÈME FONDAMENTAL. — *Étudier les propriétés topologiques des surfaces algébriques surtout en tant qu'elles se reliaient à celles de leurs courbes algébriques.*

6. La propriété suivante des cycles algébriques, d'ailleurs fort importante pour la suite, montre à quel point ils sont particularisés.

THÉOREME. — *Pour une orientation convenable de V_2 , les nombres arithmétique et algébrique de points d'intersection de deux cycles algébriques sont égaux ⁽²⁾.*

Orientons pour commencer une section plane H donnée; il en

⁽¹⁾ Nous étendrons plus tard (Chap. IV, § VII), cette définition aux cycles simplement homologues à une somme ou une différence de courbes algébriques.

⁽²⁾ Voici une démonstration analytique de cet important théorème. Elle est basée sur une identité assez simple que l'on trouvera développée dans mon Mémoire couronné. Soient, pour simplifier, $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ deux fonctions algébriques de $x = x' + ix''$, $y = y' + iy''$. Si l'on pose $f = f' + if''$, $\varphi = \varphi' + i\varphi''$, on a

$$(1) \quad \frac{D(f', f'', \varphi', \varphi'')}{D(x', x'', y', y'')} = \left| \frac{D(f, \varphi)}{D(x, y)} \right|^2,$$

généralisation d'une relation d'ailleurs classique pour les fonctions d'une seule variable. Or soient F, Φ les M_2 de S_4 réel $x', \dots, y''$, aux équations $f' = f'' = 0$; $\varphi' = \varphi'' = 0$. Il suffit de se reporter aux définitions de Poincaré pour les orientations et les nombres algébriques d'intersection des variétés, telles qu'il les a données dans son Mémoire de l'École Polytechnique (1895), pour reconnaître qu'en vertu de (1) les contributions des divers points de l'intersection de F et Φ au nombre $(F\Phi)$ sont égales. Ceci revient à démontrer notre théorème pour le plan complexe. L'extension à plus de deux variables, puis à des surfaces ou des variétés algébriques quelconques, est facile.

Remarque non sans utilité, tout ceci est applicable même quand les fonctions ne sont pas algébriques, pourvu que l'on ne considère que leurs intersections contenues dans un domaine où elles sont toutes holomorphes.

résultera une orientation pour toute autre H' en vertu de ce que $H' \sim H$. Démontrons d'abord le théorème pour H et H' . A cet effet, en un de leurs points d'intersection P , construisons les indicatrices, puis orientons V_2 de façon que P compte pour $+1$ dans (HH') . Faisons ensuite varier le plan de H , sans qu'il devienne jamais tangent à H' , de manière à ramener P à un autre point d'intersection P' . Durant le mouvement, l'orientation de H ne changera pas et elle reviendra à sa position primitive avec la même orientation, puisque le cycle H reste constamment homologue à lui-même. De plus, les indicatrices resteront toutes positives pour leurs variétés respectives, toutes bilatères. Celles qu'elles fourniront en P' auront donc la même situation relative qu'en P . Par suite, P' compte aussi pour $+1$ dans (HH') , ce qui démontre notre affirmation quand il s'agit de deux sections planes.

Pour orienter une courbe algébrique quelconque C , nous ferons comme ceci : Soit H une section plane osculant la courbe au point P . On peut tracer d'une infinité de manières deux petits triangles ζ , ζ' , entourant P sur C et H respectivement, dont le second est une indicatrice de H , alors que le premier lui correspond point par point, biunivoquement, de façon que la distance entre deux points correspondants soit très petite par rapport aux dimensions de ζ ou ζ' . On nommera les sommets de ζ dans le même ordre que ceux correspondants de ζ' ; ζ ainsi orienté servira d'indicatrice à C .

Ceci posé, il est clair que l'orientation ainsi attribuée à C ne dépend aucunement du point P . Enfin si D est une courbe algébrique quelconque passant par P , les contributions de P à (CD) et à (HD) sont égales. Donc, pour la détermination de (CD) , on peut remplacer en chacun de leurs points d'intersection les courbes C , D par deux sections planes, ce qui suffit pour compléter la démonstration.

Remarque. — Bien entendu on suppose C et D non tangentes, ce qui nous suffira pour la suite. L'extension au cas où il y aurait contact ne présente d'ailleurs pas de difficultés sérieuses.

COROLLAIRE. — Une courbe algébrique C ne peut former frontière.

En effet il en existe toujours une autre D qui la rencontre. Comme $(CD) \neq 0$, C ne peut être un cycle nul.

7. Transformations birationnelles. — Les nombres R_k , σ_k , etc. sont bien invariants par rapport à l'homéomorphisme, mais comment se comportent-ils par rapport au groupe fondamental de la Géométrie algébrique, celui des transformations birationnelles? Le nombre R_1 est un *invariant absolu*, c'est-à-dire par rapport à toutes les transformations en question. Pour R_2 , au contraire, cela dépendra de la transformation birationnelle considérée et il pourra fort bien arriver qu'il change si la transformation introduit des courbes *exceptionnelles*, ou courbes transformées de points, car dans ce cas la surface et sa transformée ne sont pas homéomorphes. Sans entrer davantage dans la question, contentons-nous d'affirmer que R_2 se comporte comme l'invariant de Zeuthen-Segre (voir Chap. III, n° 11).

II. — Étude des cycles d'une courbe variable dans un faisceau linéaire.

8. Soit $|C|$ un système linéaire, ∞^2 au moins, aux courbes génériques irréductibles de genre p et se coupant deux à deux en $m > 0$ points. Nous supposons explicitement que : (a) si $|C|$ est ∞^r , il ne contient pas ∞^{r-1} courbes réductibles; (b) quand une C acquiert une nouvelle singularité, celle-ci consiste uniquement, en général, en un point double ordinaire, le genre s'abaissant alors de p à $p - 1$.

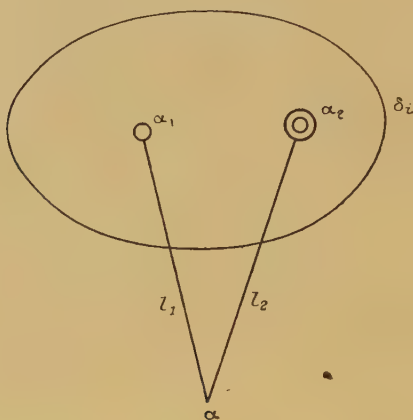
Toute surface à singularités ordinaires possède de tels systèmes. En effet, lorsqu'elle n'est pas une surface réglée ou de Steiner, les propriétés (a), (b) sont vérifiées pour le système des sections planes (Castelnuovo), et dans les deux cas exceptionnels par ceux que découpent les surfaces d'ordre ≥ 3 . D'ailleurs les propriétés (a) et (b) ne sont pas d'importance fondamentale, et nous ne les imposons que pour faciliter la discussion. En particulier, presque tous nos résultats sont vrais même quand (a) n'est pas vérifiée.

9. Prenons donc dans C un faisceau générique $\{C_u\}$. En vertu

de (a) toute C_u sera irréductible et son genre sera p , sauf pour certaines valeurs critiques $a_1, a_2, \dots, a_n$, de u où, d'après (b), il s'abaissera à $p - 1$.

Soient X, Y des coordonnées courantes sur C ; $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ les points de branchement de la fonction $Y(X)$; aa_i des coupures

Fig. 1.



dans le plan u . Tant que u décrit un circuit ne traversant pas ces coupures, des lacets $\alpha\alpha_i$ du plan X sont ramenés à leur position initiale, et tout cycle linéaire de C_u à une position homologue. Supposons que u traverse aa_i , et soient α_1, α_2 les points de branchement de $Y(X)$ en coïncidence pour $u = a_i$. En ce point les deux mêmes valeurs de Y sont permutées, car seulement deux valeurs en deviennent égales au nouveau point double de C_{a_i} . Désignons par l_k les lacets $\alpha\alpha_k$. On observe de suite que $\delta_i \sim l_2 - l_1$ est invariant au voisinage de a_i , car ce n'est autre que le cycle entourant α_1 et α_2 dans un des feuillets de la surface de Riemann qui représente la variation de la fonction $Y(X)$. Pour tout autre cycle γ , on a

$$\gamma \sim t_1 l_1 + t_2 l_2 + l,$$

où l est une somme de lacets l_k , $k > 2$, donc invariante au voisinage de a_i . Or

$$\gamma \sim (t_1 + t_2) l_1 + t_2 \delta_i + l,$$

et quand u tourne autour de a_i , l_1 se transforme en l_2 (fig. 2).

Donc si γ' est le transformé de γ , on a

$$\gamma' - \gamma \sim (t_1 + t_2)(l_2 - l_1) \sim (t_1 + t_2)\delta_i.$$

D'ailleurs ($fg, 1$),

$$(l_1\delta_i) = +1, \quad (\delta_i\delta_i) = (\delta_i l) = 0;$$

donc

$$(\gamma\delta_i) = t_1 + t_2,$$

et par suite finalement

$$(\gamma' - \gamma) \sim (\gamma\delta_i) \cdot \delta_i.$$

Observons enfin que quand u tend vers a_i , δ_i tend vers un point,

Fig. 2.



le nouveau point double de C_{a_i} , ou, plus exactement, il tend vers un cycle réductible à ce point dans C_{u_i} . Nous pouvons donc énoncer :

THÉORÈME FONDAMENTAL. — *A tout point critique a_i correspond un cycle linéaire δ_i de C_u , invariant dans son voisinage et réductible à un point pour $u = a_i$. Quand u tourne autour de a_i , tout autre cycle γ s'accroît de $(\gamma\delta_i) \cdot \delta_i$.*

Au coefficient $(\gamma\delta_i)$ de δ_i près, ce théorème remonte à M. Picard ⁽¹⁾. Il n'est que juste de dire que ce coefficient jouera un rôle capital dans la suite. C'est en effet sa connaissance qui va nous permettre de résoudre la plupart des questions qui vont se

(¹) Voir PICARD et SIMART, *Traité*, vol. I, p. 95.

présenter, sans avoir recours à des éléments étrangers, tels que la théorie transcendante, comme le faisait d'une manière d'ailleurs si brillante M. Picard. Outre sa valeur didactique, notre méthode va nous fournir des résultats nouveaux; de plus elle, seule, est pour l'instant susceptible d'être étendue aux variétés algébriques.

Corollaire. — Pour que γ soit complètement invariant (nous dirons « invariant » tout court), il faut et il suffit que les nombres $(\gamma \delta_i)$ soient tous nuls.

10. *Il existe un cycle δ'_i rencontrant δ_i en un seul point, donc s'accroissant de δ_i quand u tourne autour de a_i . Il suffit de prendre*

$$\delta'_i = l_1 + l,$$

où l est un chemin permutant les mêmes valeurs de $Y(X)$ que l_1 et l_2 , mais égal à une somme de lacets ne les comprenant ni l'un ni l'autre. Ce chemin existe certainement, car autrement on ne pourrait tracer dans C_{a_i} aucun chemin permutant ces deux valeurs, puisque pour cette courbe les lacets l_1 , l_2 disparaissent. La courbe C_{a_i} serait donc réductible, ce qui est contre nos hypothèses.

Comme corollaire de ce que $(\delta_i \delta'_i) = 1$, δ_i n'est pas un cycle nul de C_u , quoiqu'il le soit pour V_2 .

11. **Lieux de certaines multiplicités.** — Il convient d'ouvrir ici une parenthèse pour discuter une question qui reviendra fréquemment. Soit M_k une multiplicité contenue dans C_u , ou de frontière dans C_u . Quelle est la nature de son lieu quand u varie? Précisons la question. D'abord on supposera que M_k varie de façon continue avec u . Ensuite, une fois pour toutes, on fera varier u de cette manière : on considère la demi-droite

$$(1) \quad \text{argument}(u - \alpha) = \text{constante},$$

et l'on suppose que sur chacune de ces demi-droites u varie de l'infini à la valeur α , puis on fera varier l'argument de 0 à 2π . Dans le plan u on considérera les coupures aa_i et, en outre, une coupure le long de la demi-droite (1) d'argument zéro. Nous appellerons cette dernière coupure la coupure $a\infty$. Dans le cas où la demi-

droite en question passerait par un des points critiques, nous la remplacerions par une autre correspondant à un argument θ quelconque, quitte à faire varier l'argument de (1) de θ à $\theta + 2\pi$.

Dans les conditions indiquées, on est assuré que les frontières de M_{k+2} lieu de M_k se composent uniquement : (a) du lieu de celles de M_k ; (b) des multiplicités suivantes : Soit u un point sur une coupure; et désignons-le par u' ou u'' , suivant qu'on le considère comme sur un bord ou sur l'autre. La différence entre les M_k relatives à $C_{u'}$ ou $C_{u''}$ est un Γ_k dont le lieu, quand u décrit la coupure, est une des multiplicités frontières de M_{k+2} . Les différentes frontières ainsi obtenues se rattachent par des éléments de la courbe C_a .

La nécessité d'introduire la coupure $a\infty$ est due à ce fait : Il n'y a pas de raison pour que, quand $|u - a|$ reste fixe, son argument variant de 0 à 2π , ou bien de θ à $\theta + 2\pi$ suivant le cas, la position finale de M_k coïncide avec sa position initiale. Leur différence engendre une frontière de type (b) quand u décrit la coupure $a\infty$.

12. Application : Lieu d'un cycle invariant. — Dans le cas d'un cycle linéaire invariant, on se trouve dans les conditions les plus simples. Si γ est invariant, le cycle Γ_1 relatif à une coupure quelconque est nul pour C_u . Soit M'_2 la partie de C_u qu'il limite. Quand u décrit la coupure, M'_2 engendre une M'_3 ; les M'_3 ainsi obtenues, ajoutées au lieu propre de γ , forment une multiplicité Γ_3 ne possédant au pis aller qu'une partie de C_a comme frontière. Mais C_a , courbe irréductible comme toutes celles de son faisceau, est une M_2 connexe. Donc cette frontière ne peut se composer que de C_a tout entière, ce qui est impossible, car C_a est un Γ_2 non nul (n° 6). Donc enfin Γ_3 est un cycle à trois dimensions coupant C_u précisément suivant γ . Il n'est d'ailleurs pas difficile de voir que les M'_3 sont réductibles à des multiplicités de dimension moindre. Ceci justifie le terme *lieu de γ* appliqué à Γ_3 .

13. THÉORÈME. — *Tout cycle invariant homologue à une somme de $\delta_i \pmod{C_u}$ forme frontière sur la courbe (1).*

(1) Voir Chapitre IV, n° 7, pour une démonstration transcendante. Celle de mon article des *Annals of Mathematics*, vol. XXI, 1920, est incorrecte comme

On verra combien cette propriété est importante pour la classification de ses cycles.

Soit Δ_i l' M_2 lieu de δ_i quand u décrit aa_i , lieu évidemment homéomorphe à une hémisphère et que nous nommerons l'*onglet* Δ_i . Soit γ le cycle de l'énoncé. Si on le suppose placé pour le moment, ainsi que les δ_i , dans C_a , on pourra écrire

$$\Delta_i \equiv \delta_i; \quad \sum t_i \Delta_i \equiv \gamma = \sum t_i \delta_i \sim 0 \quad (\text{mod } V_2).$$

Faisant varier u et supposant maintenant γ dans C_u , soit Γ_3 son lieu. Nous allons montrer que $\Gamma_3 \sim 0 \pmod{V_2}$, d'où découlera notre théorème, car de $M_4 \equiv \Gamma_3$ on tire de suite (Chap. I. n° 14)

$$M_4 C_u \equiv \gamma.$$

14. Soit d'abord C_0 une courbe quelconque du système $\{C\}$, n'appartenant pas à $\{C_u\}$. Il existe un faisceau linéaire unique, $\{C'_v\}$, du système, contenant C_0 et une C_u quelconque donnée. Nous supposerons la variable v choisie de façon que C_u corresponde à la valeur $v = b$, constante quelconque.

Soient $b_1(u)$, $b_2(u)$, ..., $b_n(u)$ les valeurs critiques de v . Faisons tendre $\{C_u\}$ vers $\{C'_v\}$ dans $\{C\}$, de manière à amener a en b et chaque point a_i au point b_i de même indice. Les δ_i , Δ_i deviendront des éléments semblables, δ'_i , Δ'_i , pour $\{C'_v\}$, relatifs à certaines coupures bb_i du plan v . Considérant cette fois les δ'_i comme situés dans $C_u = C'_b$, nous aurons

$$\sum t_i \Delta'_i \equiv \gamma = \sum t_i \delta'_i.$$

Aux coupures déjà pratiquées dans le plan u , ajoutons-en d'autres aa'_j , allant aux points a'_j où plusieurs b_i coïncident. Nous allons rechercher les frontières de l' M_4 lieu de $\sum t_i \Delta'_i$ quand u varie. En se reportant au n° 11 on voit qu'il s'agit essentiellement

me l'a obligeamment indiqué M. Alexander. C'est une observation qu'il m'a faite qui m'a suggéré l'idée de faire intervenir un second faisceau appartenant à ICI, c'est-à-dire au fond le fait que le système est ∞^2 au moins. La simplicité relative de la démonstration transcendante que je possédais depuis longtemps est frappante. Elle est d'ailleurs en relation étroite avec un résultat de M. Picard (*loc. cit.*, vol. II, p. 388).

d'étudier un certain cycle Γ_2 correspondant à chaque coupure et son lieu quand u la décrit.

15. *Examinons d'abord la coupure $a\infty$.* Je dis d'abord que la frontière correspondante de M_1 , frontière lieu du Γ_2 relatif à la coupure, peut être supprimée. Soient en effet u' , u'' deux points opposés de la coupure. Quand la demi-droite (1) du n° 11 tourne autour de a , on peut concevoir qu'un de ses points parte de u' pour aboutir à u'' , sans jamais traverser les coupures. L'ensemble des trajets des points de (1) donne ainsi lieu à une famille de circuits du plan u , tous intérieurs les uns aux autres, partant d'un cercle de rayon infiniment grand pour terminer avec la ligne polygonale formée par les bords de toutes les coupures.

Durant le déplacement de u , la figure formée par les lacets du plan v varie, mais reste cependant réductible à sa position primitive par une déformation durant laquelle on ne permet pas aux lacets bb_i de se traverser. Par suite la position finale de cette figure est réductible à sa position initiale par une déformation analogue. Puisque le trajet de u est un chemin n'entourant aucun des points a_i , a'_j , dans son plan, les points critiques $b_k(u)$ reviennent exactement à leurs positions primitives. On peut donc contrôler la déformation de notre figure pendant que u varie, de manière qu'elle retourne exactement à sa position première. Il y aura alors coïncidence des M_2 relatives à u' et u'' , dont la différence donne lieu à Γ_2 . Cela montre bien que la frontière de M_4 , relative à $a\infty$, peut être supprimée.

Passons aux coupures aa_i . Quand u tend vers a_i , un des points b_k , soit b_1 , tend vers b ; quand u tourne une fois autour de a_i , b_1 en fait autant pour b . En faisant la figure on voit de suite que les M_2 relatives à deux points opposés, u' , u'' , de aa_i , ne diffèrent que par le lieu de γ quand v décrit le lacet bb_1 , c'est-à-dire va de b à b_1 , puis retourne à b , après avoir tourné autour de b_1 . Ici Γ_2 se compose de deux multiplicités opposées; donc il peut être supprimé. Ainsi il n'y a pas non plus de frontières de M_4 relatives aux coupures aa_i .

16. *Examinons finalement les coupures aa'_j .* Lorsque u tend vers a'_j , certains des points b_k , soient pour l'instant deux seule-

ment b_1, b_2 , tendent à coïncider. Soient encore u', u'' deux points opposés sur la coupure aa'_j . Cette fois Γ_2 est réductible à un multiple du lieu Δ de δ'_1 , quand ν décrit une certaine ligne $b_1 b_2$. D'ailleurs le cycle δ'_1 se réduit à un point aux deux extrémités de la ligne. On le sait pour b_1 ; quant à b_2 , puisque $\Gamma_2 \sim \lambda \Delta$, Δ doit être fermée, et ceci par une partie de C'_{b_2} , ce qui exige que

$$\lambda \delta'_1 \sim 0 \pmod{C'_{b_2}};$$

donc δ'_1 est homologue au cycle de C'_ν qui s'évanouit en b_2 . Nous ne devons pas en conclure que $\delta'_1 \sim \delta'_2$ dans toute C'_ν , mais seulement que le cycle de C'_ν en coïncidence avec δ'_1 pour ν voisin de b_1 , tend aussi à devenir homologue à δ'_2 quand ν tend vers b_2 le long de la ligne $b_1 b_2$.

Je dis que l'on peut toujours s'arranger pour que Δ ne rencontre pas la courbe C_0 , qui, rappelons-le, appartient à tout $\{C'_\nu\}$. Soient en effet cette fois X, Y deux coordonnées courantes sur C'_ν , puis construisons encore la surface de Riemann à plusieurs feuillets, image de la fonction $Y(X)$. Le cycle δ'_1 y entoure, dans l'un des feuillets, deux ou plusieurs points de branchement α_k qui tendent à coïncider quand u tend vers a'_j , en même temps que ν tend vers $b_1(u)$. D'ailleurs les points de branchement sont les seuls que l'on ne puisse peut-être pas faire éviter au cycle par une déformation convenable. Or, au pis aller, il y a un nombre fini de faisceaux $\{C'_\nu\}$, donc seulement un nombre fini de valeurs de u , pour lesquelles ces points de branchement coïncident, dans une ou plusieurs C'_ν , avec un des points-bases du faisceau. Faisons donc éviter, aux coupures aa'_j , ces valeurs particulières de u , puis pour chaque u sur aa'_j , à la ligne $b_1 b_2$ le point ν correspondant à C_0 , condition facile à satisfaire. Dans ces circonstances, Δ ne rencontrera effectivement pas C_0 .

Dans le cas où plusieurs b_k , soient $b_1, b_2, \dots, b_s$, coïncideraient au lieu de deux seulement, il y aurait plusieurs Δ , lieux de certains cycles de C'_ν quand ν décrit des segments $b_h b_k$ convenables, mais à part cela rien ne serait changé. Nous pouvons donc affirmer, dans tous les cas, que quand u est quelconque sur aa'_j , Γ_2 , somme de multiplicités Δ , ne rencontrera pas C_0 , et il en sera de même pour son lieu Γ'_3 quand u décrit aa'_j , ainsi que pour la somme Γ'_3 de ces lieux.

17. En définitive, la frontière totale de M_4 se compose de Γ'_3 et du lieu Γ_3 de γ quand u varie. Donc $\Gamma_3 + \Gamma'_3 \equiv 0$. Comme $\Gamma_3 \equiv 0$, aussi $\Gamma'_3 \equiv 0$, c'est-à-dire Γ'_3 est un cycle.

Faisons maintenant tendre C_0 , dans $|C|$, vers une C_u quelconque, sans jamais lui faire acquérir de singularités nouvelles. A partir d'un certain moment il arrivera que Γ'_3 , que l'on maintient fixe, coupera la courbe variable suivant un cycle γ' . Mais comme le genre de la courbe est fixe $\gamma' \sim 0$. Sa position limite γ'' dans C_u y formera aussi frontière. Mais l'intersection de la frontière de M_4 avec C_u y forme frontière, d'où $\gamma + \gamma'' \sim 0$, et enfin $\gamma \sim 0$. Ceci démontre notre théorème.

18. THÉORÈME — *Tout cycle de C_u est relié aux δ_i et aux cycles invariants, par une homologie.*

Soient $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2p}, 2p$ cycles indépendants de $C_u, 2p - r$ le rang de la matrice

$$\|(\gamma_i \delta_k)\| \quad (i = 1, 2, \dots, 2p; k = 1, 2, \dots, n).$$

En fait, supposons, ce qui ne diminue pas la généralité, le déterminant

$$|(\gamma_i \delta_k)| \neq 0 \quad (i, k = 1, 2, \dots, 2p - r).$$

Alors, comme $(\gamma \gamma') = 0$ pour tout γ' entraîne $\gamma \sim 0$ (Chap. II, n° 19) :

1° Les cycles $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2p-r}$ sont indépendants et il en est de même de $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{2p-r}$.

2° Tout δ_i dépend de $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{2p-r}$. En effet, on peut toujours trouver des entiers t , avec $t_0 \neq 0$, tels que

$$(\gamma, t_0 \delta_i - t_1 \delta_1 - t_2 \delta_2 - \dots - t_{2p-r} \delta_{2p-r}) = 0$$

pour tout γ .

3° Pour tout γ on peut trouver des entiers t , avec $t_0 \neq 0$, tels que

$$(\delta_i, t_0 \gamma - t_1 \gamma_1 - t_2 \gamma_2 - \dots - t_{2p-r} \gamma_{2p-r}) = 0,$$

quel que soit δ_i . Le cycle

$$t_0 \gamma - t_1 \gamma_1 - t_2 \gamma_2 - \dots - t_{2p-r} \gamma_{2p-r}$$

sera donc invariant. En particulier, on pourra remplacer ainsi

$\gamma_{2p-r+1}, \gamma_{2p-r+2}, \dots, \gamma_{2p}$ par autant de cycles invariants, soient $\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_r$.

Ceci posé, toute somme de δ_i invariante est nulle, donc aucune combinaison des cycles $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{2p-r}$ ne peut l'être. Ces $2p-r$ cycles sont donc indépendants des γ' et enfin les $2p$ cycles $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{2p-r}, \gamma'_1, \dots, \gamma'_r$ sont indépendants, d'où le théorème s'ensuit.

19. COROLLAIRES. — I. *Tout cycle C_u dépend des cycles invariants (mod V_2).*

II. Le déterminant gauche

$$|(\delta_i \delta_j)| \neq 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, 2p-r).$$

En effet, les entiers $(\gamma'_j \delta_i)$ sont tous nuls. Donc la matrice analogue à celle écrite plus haut, relative aux $2p$ cycles $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{2p-r}, \gamma'_1, \dots, \gamma'_r$, est de même rang que

$$\|(\delta_i \delta_h)\| \quad (i = 1, 2, \dots, 2p-r; h = 1, 2, \dots, n),$$

dont le rang doit être $2p-r$. On doit donc pouvoir en tirer un déterminant non nul de cet ordre. Puisque tout δ_i dépend des $2p-r$ premiers, tout déterminant d'ordre $2p-r$ de la matrice est le produit de celui écrit plus haut par un nombre rationnel. Donc, effectivement, ce déterminant n'est pas nul.

III. *L'entier r est pair.* En effet, $2p-r$, ordre d'un déterminant gauche non nul, est pair, donc r l'est aussi. Soit $r = 2q$. L'entier q est l'*irrégularité* de la surface. C'est un invariant dont l'importance ressortira nettement plus tard.

IV. Puisque les $2p$ cycles écrits plus haut sont indépendants, le déterminant d'ordre $2p$, dont les éléments sont leurs nombres d'intersections mutuelles, n'est pas nul. Comme $(\gamma'_i \delta_j) = 0$, la valeur de ce déterminant est égale au produit

$$|(\delta_i \delta_j)| \cdot |(\gamma'_h \gamma'_k)| \quad (i, j = 1, 2, \dots, 2p-r; h, k = 1, 2, \dots, r);$$

d'où

$$|(\gamma'_h \gamma'_k)| \neq 0,$$

résultat utile plus loin.

20. Ajoutons quelques mots sur la variation des lignes joignant entre eux les points-bases $A_1, A_2, \dots, A_m$ de $\{C_u\}$. Soit l_j une ligne joignant A_i à A_j dans C_u . Quand u tourne autour de a_i , l_j s'accroît de $(l_j \partial_i) \partial_i$; on le montre comme pour les cycles. Reprenons les cycles indépendants $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2p}$. Je dis que si

$$l = \sum_1^{2p} \lambda_h \gamma_h + \sum_2^m \mu_j l_j$$

est une ligne, ou plutôt une somme de lignes, invariante, les coefficients des l_j y sont tous nuls, de sorte que cette somme est un cycle. En effet, autrement le lieu de la somme est une M_3 ouverte comme sa trace sur C_u . Or la frontière de M_3 ne peut que se réduire à C_u , ce qui est impossible, puisque le cycle C_u n'est pas nul (n° 6).

Comme conséquence, la matrice

$$\left\| \begin{array}{cccc} (\gamma_1 \partial_1) & (\gamma_1 \partial_2) & \dots & (\gamma_1 \partial_n) \\ (\gamma_2 \partial_1) & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & (\gamma_{2p} \partial_n) \\ (l_2 \partial_1) & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & (l_m \partial_n) \end{array} \right\|$$

est de rang $2p - 2q + m - 1$.

CHAPITRE III.

TOPOLOGIE DES SURFACES ALGÈBRIQUES.

I. — Réduction à une cellule ⁽¹⁾.

1. Nous allons faire l'étude des cycles de V_2 en pratiquant des coupures la réduisant à une cellule. D'après le lemme du Chapitre I, n° 11, pour avoir tous les cycles, il suffira de rechercher ceux formés avec les éléments des coupures. Dans cette recherche, la discussion du Chapitre précédent va jouer un rôle essentiel.

Tout d'abord, les coupures aa_i , $a\infty$ réduisent le plan u à une cellule E'_2 . Traçons ensuite sur C_u des rétrosections γ_h partant du point A_i pour y retourner et ne se coupant nulle part ailleurs. Pratiquons enfin des coupures le long de ces rétrosections et aussi le long des lignes $l_j = A_i A_j$, que nous supposerons maintenant tracées de manière à ne se couper mutuellement et à ne rencontrer les γ_h qu'au même point A_i . Ces conditions sont faciles à réaliser, car les coupures γ_h réduisent C_u à une cellule dont les A_i ($i > 1$) sont des points internes, A_1 seul étant sur la frontière. Il est alors évidemment possible de tracer les l_j de la manière voulue.

Nos coupures vont réduire C_u à une cellule E''_2 , dont les A_i ne sont pas des points internes, condition nécessaire comme on va le voir. Quand u décrit E'_2 , E''_2 engendre une cellule E_4 dérivée de V_2 à l'aide de coupures à trois dimensions, lieux de celles de C_u ; c'est ce que nous appellerons « la cellule V_2 ».

Si l'on n'avait pas pratiqué les coupures l_j dans C_u , on n'aurait

⁽¹⁾ Voir PICARD et SIMART, vol. II, Chap. XI et XII. — POINCARÉ, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5^e série, vol. VIII, 1902; 6^e série, vol. II, 1906. — LEFSCHETZ, *Annals of Mathematics*, vol. XXI, 1920.

pu conclure à l'existence d'une cellule à quatre dimensions, car le lieu de E'_2 aurait comme points internes les A_i et l'on n'aurait pas le droit d'affirmer qu'il est homéomorphe à une cellule.

2. La frontière totale de la cellule comprend : 1° le lieu de C_u quand u décrit la frontière de E'_2 , c'est-à-dire les coupures aa_i ; 2° les lieux G_h, L_j des γ_h et des l_j . Comme éléments à deux dimensions, il y a donc d'abord les courbes C_a, C_∞, C_{a_i} , ensuite les ongllets Δ_i du Chapitre II, n° 13. En effet, il y a au moins un cycle linéaire coupant δ_i en un point, donc non invariant en a_i (Chap. II, n° 10). Par suite une des rétrosections, soit γ_h , rencontre δ_i en un nombre non nul de points. La différence entre les lieux de la coupure γ_h quand u décrit les bords de aa_i , est une multiplicité déformable en $(\gamma_h \delta_i) \cdot \Delta_i$. Cette déformation revient à une déformation continue de la coupure G_h .

II. — Réduction des cycles linéaires à C_u .

Relation fondamentale $R_1 = 2q$. Cycles à trois dimensions.

3. En examinant les éléments linéaires de la frontière de la cellule V_2 , on voit de suite qu'ils gissent tous dans des C_u . Il ne serait pas difficile d'en déduire la réduction à une C_u unique. Il est plus aisé cependant de procéder autrement.

Tout Γ_1 de V_2 se compose de plusieurs circuits, et il suffit d'établir la réduction voulue pour l'un d'eux, soit Γ'_1 . Déformons Γ'_1 en un circuit simple passant par A_1 d'une manière quelconque, avec une C_u unique tangente, qu'il n'y a pas d'inconvénients à supposer être C_a . Soit B un point quelconque de Γ'_1 , et dans sa C_u joignons-le à A_1 par une ligne h . Quand B décrit Γ'_1 , h part d'une position h' dans C_a pour revenir à une position h'' dans la même courbe. h', h'' sont des circuits de C_a , et l'on peut évidemment choisir h de telle manière que l'un d'eux, soit h'' , se réduise à un point. Alors l' M_2 décrite par h aura pour frontière Γ'_1 et h' et l'on a bien $\Gamma'_1 \sim -h'$. La réduction de Γ'_1 à $-h'$ se fait d'ailleurs en le glissant le long de M_2 , car la figure formée par M_2, Γ'_1, h' est homéomorphe à la partie d'une sphère comprise entre deux sections planes tangentes l'une à l'autre. En appliquant le même

raisonnement aux autres circuits de Γ_1 , on réduira le cycle entier à C_a , qui est d'ailleurs une C_u quelconque.

COROLLAIRES. — I. *Les rétrosections de C_u forment un système fondamental pour les cycles linéaires de V_2 .*

II. *Tout cycle linéaire de V_2 dépend des cycles invariants de $C_u \pmod{V_2}$.*

4. Pour que la réduction des cycles linéaires à C_u puisse se faire, il suffit que $\{C_u\}$ possède un point-base. Cela revient à exiger que le nombre $(C_u C_u)$, que l'on dénote aussi par (C_u^2) et que l'on appelle *degré* du faisceau, soit positif. D'où ce théorème de M. Severi ⁽¹⁾ :

Pour que tout cycle linéaire de V_2 soit réductible à une courbe algébrique donnée, il suffit qu'elle appartienne à un faisceau linéaire de degré positif.

La démonstration de M. Severi est par voie transcendante. Pour les sections planes, M. Picard en avait donné une se rapprochant de la nôtre.

5. Reprenons les cycles invariants indépendants $\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_r$ du Chapitre II, n° 18. γ'_j a pour lieu, quand u varie, un cycle à trois dimensions Γ_3^j , et l'on a

$$(\gamma'_i \Gamma_3^j) = (\gamma'_i \gamma'_j).$$

Donc (Chap. II, n° 19) le déterminant

$$|(\gamma'_i \Gamma_3^j)| \neq 0.$$

Ceci entraîne l'impossibilité d'une homologie

$$\sum t_i \gamma'_i \sim 0 \pmod{V_2},$$

Car on en déduit

$$\sum_i t_i (\gamma'_i \Gamma_3^j) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, r),$$

⁽¹⁾ *Palermo Rendiconti*, 21^e vol., 1906.

d'où, puisque le déterminant ci-dessus n'est pas nul, les t le sont. Ainsi les γ'_i sont indépendants (mod V_2), et, puisque tout cycle de la surface leur est relié par une homologie,

$$r = 2q = R_1,$$

c'est-à-dire : *L'indice de connexion linéaire est pair et égal au double de l'irrégularité* ⁽¹⁾. Ce théorème fournit une première raison du rôle important joué par q dans la théorie des surfaces algébriques.

6. Passons maintenant aux *cycles à trois dimensions*. Dans la composition d'un Γ_3 ne peuvent entrer les lieux de C_u quand u décrit les lignes aa_i , car on ne peut obtenir ainsi de multiplicités fermées. Par suite,

$$(1) \quad \Gamma_3 \sim \sum_1^{2p} j \lambda_j G_j + \sum_2^m k \mu_k L_k$$

Son intersection avec C_u

$$\gamma \sim \sum_1^{2p} j \lambda_j \gamma_j + \sum_2^m k \mu_k l_k$$

doit être fermée, donc tous les μ doivent s'annuler, d'où

$$\Gamma_3 \sim \sum_1^{2p} j \lambda_j G_j.$$

D'ailleurs γ est invariant, sans quoi Γ_3 aurait des frontières sommes de Δ_i . Réciproquement, tout cycle invariant a pour lieu un Γ_3 (Chap. II, n° 12).

Il y a équivalence entre les homologies

$$\Gamma_3 \sim 0 \pmod{V_2}; \quad \gamma \sim 0 \pmod{C_u}.$$

(1) La parité de R_1 a été démontrée jusqu'ici uniquement par voie transcendante. Une première démonstration topologique dans mon Mémoire des *Annals of Mathematics* était basée sur des théorèmes imparfaitement démontrés, quoique vrais. Voir, pour une démonstration transcendante, PICARD et SIMART, vol. II, p. 423.

En effet, de $M_4 \equiv \Gamma_3$ on déduit $M_4 C_u \equiv \gamma$, donc $\gamma \sim 0 \pmod{C_u}$. D'un autre côté, si $\gamma \sim 0 \pmod{C_u}$, les λ sont tous nuls et $\Gamma_3 \sim 0$.

Comme corollaire, *le nombre de cycles Γ_3 distincts est le même que le nombre r des cycles invariants distincts de C_u , c'est-à-dire $R_3 = r = R_1$. C'est l'égalité de Poincaré pour les indices de connexion équidistants des extrêmes.*

7. Système fondamental et torsion pour les cycles à trois dimensions. — Pour que γ soit invariant, il faut et il suffit que

$$\sum_j \lambda_j (\gamma_j \delta_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 2p - r).$$

Ce système aura r solutions fondamentales

$$\lambda_1^h, \lambda_2^h, \dots, \lambda_{2p}^h \quad (h = 1, 2, \dots, r),$$

et il n'y a pas d'inconvénient à supposer que les cycles invariants correspondants sont précisément les γ'_h . Pour toute autre solution, on aura

$$\lambda_j = \sum_h^r t_h \lambda_j^h \quad (t_h \text{ entier; } j = 1, 2, \dots, 2p),$$

d'où de suite les homologies

$$\gamma \sim \sum_h^r t_h \gamma'_h \pmod{C_u},$$

$$\Gamma_3 \sim \sum_h^r t_h \Gamma_3^h \pmod{V_2},$$

dont la première entraîne la deuxième. Par suite, les Γ_3^h forment un système fondamental. Leur indépendance même démontre l'absence de diviseurs de zéro. D'ailleurs, directement, γ étant encore, ici comme plus loin, trace de Γ_3 , de $t\Gamma_3 \sim 0$, on tire $t\gamma \sim 0$, donc $t = 0$, car C_u n'a pas de diviseurs de zéro, et finalement $\Gamma_3 \sim 0$. Ainsi le groupe de la torsion à trois dimensions se réduit bien à l'identité (voir Chap. I, n° 8).

III. — Intersection des cycles linéaires et à trois dimensions.

8. Nous allons démontrer pour ces cycles les théorèmes annoncés à la fin du premier Chapitre.

I. Soit d'abord $(\Gamma_1 \Gamma_3) = 0$, pour tout Γ_3 , et supposons Γ_1 réduit à C_u . Avec les mêmes notations qu'au n° 7, nous aurons

$$\lambda \Gamma_1 \sim \sum_1^r \lambda_h \gamma'_h + \sum_1^{2p-r} \mu_k \delta_k \pmod{C_u},$$

et comme

$$(\Gamma_1 \Gamma_3') = 0 \quad (\partial_k \gamma'_h) = 0,$$

on aura

$$\sum \lambda_h (\gamma'_h \gamma'_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r).$$

Or le déterminant des coefficients n'est pas nul (Chap. II, n° 19). Donc les λ_h le sont, d'où

$$\lambda \Gamma_1 \sim \sum \mu_k \delta_k \sim 0 \pmod{V_2}.$$

Ceci démontre le premier théorème pour les cycles linéaires. Pour les Γ_3 , la démonstration est immédiate, car de

$$(\Gamma_1 \Gamma_3) = (\Gamma_1 \gamma) = 0,$$

quel que soit Γ_1 , on tire de suite

$$\gamma \sim 0 \pmod{C_u};$$

donc $\Gamma_3 \sim 0$.

9. Passons au second théorème : *Les invariants e_i relatifs aux intersections des Γ_1 et des Γ_3 sont tous égaux à 1.* D'après le Chapitre I, n° 19, il suffit d'établir que si

$$(\Gamma_3 \Gamma_1) \equiv 0 \pmod{e},$$

quel que soit Γ_1 , Γ_3 est le multiple d'un certain cycle de V_2 .

De l'hypothèse on déduit

$$(\gamma \Gamma_1) \equiv 0 \pmod{e}$$

pour tout Γ_i de C_u , Or, les γ_i étant toujours les rétrosections,

$$\gamma \sim \sum \lambda_i \gamma_i \pmod{C_u}.$$

En prenant les intersections de γ avec les γ_i , on obtient de suite

$$\lambda_i = (\gamma \gamma_{p+i}), \quad \lambda_{p+i} = -(\gamma \gamma_i) \quad (i \leq p).$$

Donc les λ sont tous divisibles par e . Soit $\lambda_i = e \lambda'_i$. On a

$$\gamma \sim e \bar{\gamma} = e \sum \lambda'_i \gamma_i \pmod{C_u}.$$

Les nombres $(\bar{\gamma} \delta_i)$, proportionnels aux $(\gamma \delta_i)$, nuls en vertu de l'invariance de γ , sont nuls eux aussi; donc $\bar{\gamma}$ est invariant. Soit $\bar{\Gamma}_3$ le cycle dont il est la trace. Comme corollaire de l'homologie précédente

$$\Gamma_3 - e \bar{\Gamma}_3 \sim 0 \pmod{V_2},$$

ce qui démontre la proposition.

IV. — Cycles à deux dimensions.

10. Reprenons la cellule V_2 . Les multiplicités-coupures G_j , Γ_k sont elles-mêmes des cellules à trois dimensions dont les frontières sont C_a , C_∞ , les C_{a_i} et les Δ_i . Par suite, en vertu du lemme du Chapitre I, n° 11, tout Γ_2 est réductible à ces multiplicités.

Je dis que si un Γ_2 ainsi réduit comprend une M_2 en partie dans C_{a_i} , il comprend la courbe tout entière. En effet, autrement cette M_2 doit s'appuyer par une ligne sur une autre appartenant à d'autres C_u ou à des Δ_i , ce qui est impossible, car elle ne rencontre ces multiplicités qu'en des points isolés ou bien pas du tout. Le même raisonnement s'applique à C_∞ et aux Δ_i *mais non pas* à C_a , à moins toutefois que Γ_2 ne lui appartienne en entier.

On conclut de ce qui précède que pour tout Γ_2 , on a, en désignant par (C_a) une M_2 quelconque contenue dans C_a ,

$$(1) \quad \Gamma_2 \sim \sum \lambda_i \Delta_i + (C_a) + \sum \mu_j C_{a_j} + \nu C_\infty.$$

Comme les C_{a_j} sont toutes homologues, les trois derniers termes

peuvent être mis en un seul (C_a) , de sorte que, finalement,

$$(2) \quad \Gamma_2 \sim \sum \lambda_i \Delta_i + (C_a).$$

Considérons de nouveau les δ_i comme étant dans C_a . Des congruences

$$\Delta_i \equiv \delta_i, \quad \sum \lambda_i \Delta_i + (C_a) \equiv 0$$

on tire

$$(3) \quad (C_a) \equiv - \sum \lambda_i \delta_i,$$

d'où l'homologie

$$(4) \quad \sum \lambda_i \delta_i \sim 0 \pmod{C_a}.$$

Ainsi tout Γ_2 est réductible au type (2) avec une homologie (4) correspondante.

Réciproquement à (4) correspond une congruence (3), indiquant que la multiplicité Γ_2 qui apparaît dans (2) est un cycle.

Système fondamental. — (4) est équivalente au système diophantin

$$\sum_i \lambda_i (\delta_k \delta_i) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

qui exprime que la somme à droite dans (4) est un cycle invariant (Chap. II, n° 13). En raisonnant comme pour les Γ_3 (n° 7), on trouve de suite qu'il y a $\nu = (n - 2p + 2q)$ cycle $\Gamma_2^1, \Gamma_2^2, \dots, \Gamma_2^\nu$, tels que pour tout autre on ait

$$\Gamma_2 \sim \sum t_h \Gamma_2^h \pmod{C_a}.$$

Tout comme plus haut, la multiplicité à droite, partie fermée de C_a , en est un multiple; C_a et les Γ_2^h forment le système fondamental cherché.

11. Le nombre de cycles δ_i distincts est égal à $2p - 2q$. Donc, comme nous venons de le dire plus haut, il y a $\nu = (n - 2p + 2q)$ homologies (4) distinctes. Mais à (4) peut fort bien correspondre

un Γ_2 nul. On aura alors

$$\sum \mu_j G_j + \sum \nu_k L_k \equiv \Gamma_2.$$

D'ailleurs,

$$G_j \equiv \sum (\gamma_j \delta_i) \Delta_i + (C_a), \quad L_k \equiv \sum (l_k \delta_i) \Delta_i + (C_a).$$

Par suite,

$$\Gamma_2 \sim \sum (l \delta_i) \Delta_i + (C_a), \quad l = \sum \mu_j \gamma_j + \sum \nu_k l_k.$$

Γ_2 sera du type (2) aux λ non nuls si la ligne l n'est pas invariante. Il faut donc défalquer du nombre de cycles obtenu autant de cycles qu'il y a de lignes l distinctes dont aucune combinaison n'est invariante, soit $2p - 2q + m - 1$ (Chap. II, n° 20). Par suite, il y a $n - (4p + m - 1) + 4q$ cycles Γ_2 distincts aux λ non tous nuls. Quand ces nombres sont nuls, Γ_2 appartient en entier à C_a ; donc il comprend la courbe tout entière (n° 10), et le cycle est un multiple du cycle C_a , cycle d'ailleurs non nul (Chap. II, n° 6, corollaire). On a alors finalement

$$R_2 = n - (4p + m - 1) + 4q + 1.$$

Le nombre $I = n - m - 4p$ ne dépend pas du système $|C|$. En fait ce n'est autre que le nombre caractéristique de la surface connu sous le nom d'*invariant de Zeuthen-Segre*. On a donc, la formule ne comprenant que des nombres caractéristiques de V_2 ,

$$(5) \quad R_2 = I + 4q + 2,$$

formule donnée correctement pour la première fois par M. Alexander ⁽¹⁾. M. Picard avait obtenu auparavant, par voie transcendante, la valeur $I + 4q + 1$ pour le nombre de cycles finis ⁽²⁾; à partir de là, il suffit d'établir que tout Γ_2 dépend des cycles finis et de celui que constitue la courbe à l'infini, pour arriver à (5).

12. Formule d'Euler-Poincaré. — La méthode que nous allons suivre pour l'établir est au fond celle dont s'est servi M. Alexander pour obtenir (5).

⁽¹⁾ *Rendiconti dei Lincei*, août 1914.

⁽²⁾ PICARD et SIMART, vol. II, p. 497.

Nous pouvons obtenir une subdivision de V_2 en cellules en en faisant autant pour le plan u et la courbe C_u : Pour le premier il suffit de joindre les points a_i aux points a, ∞ . Quant à C_u on le fera d'une manière quelconque, sauf à prendre soin que les sommets comprennent les m points fixes A_h . Le plan u aura n faces, $2n$ arêtes, $n+2$ sommets. Désignons par $\alpha_h, \alpha'_h, \alpha''_h$ les nombres d'éléments à h dimensions de V_2 , de C_u et des C_{a_i} .

Les α_4 éléments à quatre dimensions de V_2 proviennent de ceux à deux dimensions de C_u quand u décrit les « faces » (cellules E_2) de son plan; d'ailleurs il n'y en a pas d'autres. Donc

$$\alpha_4 = n\alpha'_2.$$

Les éléments à trois dimensions proviennent des lignes ou des faces de C_u quand u décrit les faces ou les lignes de son plan. Donc

$$\alpha_3 = 2n\alpha'_2 + 2\alpha'_1.$$

Les α_2 éléments à deux dimensions sont de trois natures. Il y a d'abord ceux dérivés des $\alpha'_0 - m$ sommets variables de C_u ou de ses α'_i lignes quand u décrit les faces ou les arêtes de son plan. Mais il y a en outre à envisager les faces des courbes C_a, C_∞, C_{a_i} . Donc

$$\alpha_2 = n(\alpha'_0 - m) + 2n\alpha'_1 + 2\alpha'_2 + n\alpha''_2.$$

De même on a de suite

$$\alpha_1 = 2n(\alpha'_0 - m) + 2\alpha'_1 + n\alpha''_1.$$

Quant à α_0 on en obtient l'expression exacte en remarquant que le nouveau point double de C_{a_i} est un point ordinaire, mais que toutefois il compte pour deux dans α''_0 comme appartenant à deux branches différentes de C_{a_i} ; il suffit donc d'ajouter tous les sommets des courbes C_a, C_∞, C_{a_i} , et en vue de la remarque ci-dessus, d'en retrancher n , pour avoir α_0 . Il ne faut pas oublier bien entendu que les m points A_i appartiennent à toutes les courbes. Par suite, enfin,

$$\alpha_0 = n(\alpha''_0 - m) + 2(\alpha'_0 - m) + m - n.$$

Rappelons maintenant que pour une W_2 de genre p ,

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2 - 2p.$$

Il n'y a qu'à se reporter par exemple au modèle à l'aide d'un disque à p trous pour le voir.

On aura donc ici

$$\alpha'_0 - \alpha'_1 + \alpha'_2 = 2 - 2p, \quad \alpha''_0 - \alpha''_1 + \alpha''_2 = 2 - 2(p-1),$$

d'où de suite pour V_2 ,

$$\sum (-1)^i \alpha_i = n - m - 4p + 4 = I + 4 = R_2 - 4q + 2 = \sum (-1)^i R_i,$$

qui n'est autre que la formule cherchée.

V. — Torsion à une et à deux dimensions.

13. Reprenons les lignes $l_j = A_1 A_j$ de C_u , ainsi que leurs lieux L_j , dont soient Γ_2^j les frontières. Puisque Γ_2^j est nul

$$(\Gamma_2^j C_u) = 0.$$

Mais Γ_2^j ne coupe C_u qu'en A_1 et en A_j ; de plus les contributions de ces points au premier membre sont $+1$ pour A_j , -1 pour A_1 . En effet, C_u ne coupe Γ_2^j que dans la partie de C_a qui lui appartient, car elle ne coupe L_j que suivant la ligne l_j . On le voit aussi en remarquant que C_u ne rencontre pas les onglets Δ_i , dont se compose précisément la partie du cycle extérieure à C_a . On pourrait se demander si les contributions, quoique de signes opposés, ont précisément les signes indiqués ci-dessus. A supposer qu'il en soit autrement, il suffirait de remplacer L_j par $-L_j$ pour avoir la situation désirée.

Soit maintenant E_2^j une petite cellule de C_a entourant le point A_j . Désignons enfin d'une façon générique par $((C_a))$ une partie de C_a ne contenant aucun des points A_j . On aura pour un cycle quelconque Γ_2 et pour Γ_2^j ,

$$\Gamma_2 \sim \sum \lambda_i \Delta_i + ((C_a)) + \sum_1^m \mu_j' E_2^j,$$

$$\Gamma_2^j \sim \sum \lambda_i'' \Delta_i + ((C_a)) + E_2^j - E_2^1 \sim 0.$$

Par suite,

$$\Gamma_2 \sim \sum \lambda_i \Delta_i + ((C_a)) + \mu_1 E_2^1.$$

Comme C_u ne rencontre ni Δ_i , ni $((C_a))$,

$$(\Gamma_2 C_u) = \mu_1(E_2^1 C_u) = \mu_1,$$

d'où finalement

$$\Gamma_2 \sim \sum \lambda_i \Delta_i + ((C_a)) + (\Gamma_2 C_a) E_2^1,$$

relation dont nous ferons un usage répété.

COROLLAIRE. — Si Γ_2 est nul ou diviseur de zéro, on a

$$\Gamma_2 \sim \sum \lambda_i \Delta_i + ((C_a)),$$

car alors un multiple du nombre $(\Gamma_2 C_u)$ est nul, donc ce nombre l'est aussi.

14. THÉORÈME. — Pour avoir tous les diviseurs Γ_2 , il faut et il suffit de rechercher toutes les homologies

$$(6) \quad t \sum \lambda_i \Delta_i + ((C_a)) \sim 0$$

qui cessent d'être vérifiées quand on y remplace t par l'unité.

D'après le corollaire, une telle homologie est bien vérifiée pour tout diviseur de zéro.

Réciproquement supposons-la vérifiée. On en tire, les δ_i étant tous dans C_a ,

$$((C_a)) \equiv -t \sum \lambda_i \delta_i.$$

La somme à droite, prise t fois, sépare C_a en deux parties dont une seule contient tous les Δ (c'est là précisément le sens de la congruence). Cette somme a donc nécessairement elle-même cette propriété, ce qui revient à dire qu'il y a une congruence

$$((C_a)) \equiv - \sum \lambda_i \delta_i.$$

On a donc bien en

$$\Gamma_2 \sim \sum \lambda_i \Delta_i + ((C_a))$$

un diviseur de zéro, puisque $t\Gamma_2 \sim 0$, sans que $\Gamma_2 \sim 0$.

15. Soit $\bar{\Gamma}_2^h$ la frontière de G_h , lieu de la rétrosection γ_h de C_u . Les homologies cherchées sont toutes de type

$$\sum_1^{2p} {}_h \nu_h \bar{\Gamma}_2^h + \sum_2^m {}_j \nu'_j \Gamma_2^j \sim 0.$$

Je dis que les coefficients ν' sont tous nuls. En effet, en exprimant les cycles en termes des éléments $\Delta_i, ((C_a)), E_2^j$, l'homologie écrite prend la forme

$$\sum \lambda_i \Delta_i + ((C_a)) + \sum_2^m {}_j \nu'_j (E_2^j - E_2^1) \sim 0,$$

et pour qu'elle soit de la forme voulue, il faut bien que $\nu'_j = 0$.

Écrivons donc les homologies (n° 11)

$$(7) \quad \bar{\Gamma}_2^h \sim \sum_i (\gamma_h \delta_i) \Delta_i + ((C_a)) \sim 0,$$

fondamentales pour celles que l'on recherche. En appliquant deux transformations unimodulaires convenables, l'une aux homologies (7), l'autre aux Δ , on obtiendra un nouveau système équivalent à (7), de la forme (1)

$$(8) \quad t_i \Delta_i + ((C_a)) \sim 0,$$

dont les homologies sont encore fondamentales pour celles cherchées. Les entiers t sont ici les diviseurs élémentaires de la matrice

$$\|(\gamma_h \delta_i)\| \quad (h = 1, 2, \dots, 2p; i = 1, 2, \dots, n).$$

Quant aux Δ' ce ne sont autres que des sommes de Δ . Donc (n° 14), si $t_i > 1$, il y a un diviseur

$$t_i \Delta'_i + ((C_a))$$

dont l'ordre, en tant qu'opération du groupe des diviseurs, est précisément t_i . Ces opérations forment d'ailleurs base pour le groupe. Par suite les t supérieurs à l'unité sont les coefficients de torsion et

$$\sigma_2 = \prod_i t_i.$$

(1) E. CAHEN, *loc. cit.*, p. 269. Le résultat de Fröbenius est immédiatement applicable ici.

16. Passons aux Γ_1 . Puisqu'ils sont tous réductibles à C_u il suffit de considérer les homologies (mod V_2) existant entre les cycles de la courbe. Les homologies fondamentales sont

$$(9) \quad \delta_i \sim 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Exprimons les δ en termes des rétrosections. Toutefois, pour faciliter l'extension aux variétés algébriques, opérons comme ceci : Aux rétrosections, associons à la manière du Chapitre I, n° 19, le système fondamental

$$\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \dots, \bar{\gamma}_{2p},$$

tel que

$$(\gamma_h \bar{\gamma}_h) = 1, \quad (\gamma_h \bar{\gamma}_k) = 0 \quad (h \neq k).$$

On aura

$$\delta_i \sim \sum_h \beta_{ih} \bar{\gamma}_h; \quad \beta_{ih} = (\gamma_h \delta_i).$$

Le système (9) peut donc être remplacé par

$$(9') \quad \sum_h (\delta_h \delta_i) \cdot \bar{\gamma}_h \sim 0 \quad (\text{mod. } V_2).$$

Deux transformations unimodulaires convenablement choisies nous conduiront à un nouveau système fondamental

$$\bar{\gamma}'_1, \bar{\gamma}'_2, \dots, \bar{\gamma}'_{2p},$$

avec, au lieu de (9'),

$$(10) \quad t_i \bar{\gamma}'_i \sim 0 \quad (\text{mod. } V_2),$$

les t désignant toujours les diviseurs élémentaires de la matrice

$$\|(\gamma_h \delta_i)\|$$

déjà considérée plus haut. Les t jouent donc le même rôle ici que pour les Γ_2 , d'où le théorème de Poincaré :

Les groupes de torsion à une et deux dimensions sont isomorphes. En particulier, $\sigma_1 = \sigma_2$.

VI. — Intersection des cycles à deux dimensions.

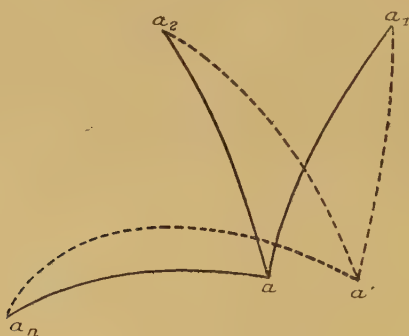
17. Proposons-nous d'abord de trouver $(\Gamma_2 \Gamma'_2)$, où

$$\Gamma_2 \sim \sum \lambda_i \Delta_i + ((C_a)) + \sum \mu_j E_2^j,$$

$$\Gamma'_2 \sim \sum \lambda'_i \Delta'_i + ((C_{a'})) + \sum \mu'_j E_2^j.$$

A cet effet, remplaçons Γ'_2 par le cycle homologue obtenu ainsi : Dans le plan u , au lieu de a , on prend comme origine des lacets un point voisin a' , autour duquel on trace des lacets $a'a_i$, se sui-

Fig. 3.



vant dans le même ordre que les aa_i autour de a ; puis δ'_i étant un cycle qui augmente de δ_i quand u tourne autour de a_i (Chap. II, n° 10), remplaçons Δ_i par le lieu Δ'_i de δ'_i quand u partant de a' décrit un circuit différant peu de $a'a_i$ (fig. 4); enfin il faudra remplacer les cellules E_2^j par d'autres analogues E_2^j situées dans $C_{a'}$. On aura alors

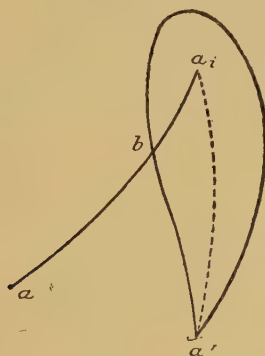
$$\Gamma'_2 \sim \sum \lambda'_i \Delta'_i + ((C_{a'})) + \sum \mu'_j E_2^j.$$

Or le circuit voisin de $a'a_i$ coupera aa_i en un point unique b . Par suite Δ'_i coupe Δ_i en un seul point, intersection de δ'_i avec δ_i dans C_b , d'où $(\Delta_i \Delta'_i) = -1$, comme on le montre sans difficulté ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ On a en tous cas $(\Delta_i \Delta'_i) = \pm 1$ et le choix du signe ne dépend pas de la

Pour trouver le nombre de points communs à Δ_i et Δ_k , on peut réduire le circuit voisin du lacet $a'a_i$ au lacet lui-même. Comme ce lacet ne coupe le lacet aa_k que si $i > k$, il n'y aura pas inter-

Fig. 4.



section pour $i < k$, et pour $i > k$ on aura

$$(\Delta_i \Delta'_k) = -(\delta_i \delta_k) = -\alpha_{ik},$$

le signe étant le même qu'auparavant. Les multiplicités $((C_a))$, $((C_{a'}))$ sont sans points communs, donc finalement

$$(11) \quad (\Gamma_2 \Gamma'_2) = -\sum \lambda_i \lambda'_i - \sum_{i > k} \alpha_{ik} \lambda_i \lambda'_k + \sum \mu_j \mu'_j.$$

Cette formule donne le nombre d'intersections dès que l'on connaît l'expression des cycles en termes des mêmes Δ . Pour les applications, il convient mieux d'en obtenir une autre plus simple. On pourrait la dériver de (11), mais on y arrivera plus vite comme il suit :

Traçons de nouvelles coupures $\bar{a}a_i$ ne se coupant pas entre elles et ne traversant pas non plus les aa_i . Désignons enfin tous les éléments relatifs aux nouvelles coupures en surmontant d'une barre

surface envisagée. Considérons donc une quadrique avec pour $\{C_u\}$ un faisceau de sections planes et envisageons sur elle le cycle nul Γ_2^2 du n° 13. Le choix du signe + donne au lieu de (11) une formule en vertu de laquelle $(\Gamma_2^2 \Gamma_2^2)$ est la somme des carrés de quatre entiers non nuls, alors que ce nombre doit être nul, puisque $\Gamma_2^2 \sim 0$. Ceci impose bien le choix du signe —, comme dans le texte.

ceux correspondants des anciennes. En particulier, nous désignerons dorénavant par δ_i ce que devient dans C_a le cycle évanouissant en a_i quand u décrit $a_i a$, et par $\bar{\delta}_i$ le cycle analogue pour $C_{\bar{a}}$ et $a_i \bar{a}$. Soit maintenant

$$\bar{\Gamma}_2 = \sum \bar{\lambda}_i \bar{\Delta}_i + ((C_{\bar{a}})) + \sum \bar{\mu}_j \bar{E}_2^j$$

le second cycle. On trouve de suite, les Δ' ayant le même sens que plus haut,

$$(\bar{\Delta}_i \Delta'_i) = -1, \quad (\bar{\Delta}_i \Delta'_k) = 0.$$

Par suite, en remplaçant dans l'expression de Γ_2 les Δ par les Δ' ,

$$(12) \quad (\Gamma_2 \bar{\Gamma}_2) = - \sum \lambda_i \bar{\lambda}_i + \sum \mu_j \bar{\mu}_j.$$

Les $\bar{\lambda}$ ne sont autres que les coefficients des λ dans la première formule dérivée, comme on pourrait le montrer directement.

18. THÉORÈME. — *Si $(\Gamma_2 \bar{\Gamma}_2)$ est nul pour tout $\bar{\Gamma}_2$, Γ_2 est nul ou diviseur de zéro.*

D'abord, puisque $(\Gamma_2 C_a)$ est nul, on aura (n° 13, corollaire)

$$\Gamma_2 \sim \sum \lambda_i \Delta_i + ((C_a)).$$

Donc, pour tout $\bar{\Gamma}_2$,

$$(13) \quad \sum \lambda_i \bar{\lambda}_i = 0.$$

Cette relation sera vérifiée pour tous les $\bar{\lambda}$ tels que

$$(14) \quad \sum \bar{\lambda}_i \bar{\delta}_i \sim 0 \pmod{C_{\bar{a}}}.$$

Pour exprimer que le cycle à gauche est nul, il suffit d'écrire qu'il est invariant, ce qui donne

$$(15) \quad \sum_i \bar{\lambda}_i (\bar{\delta}_k \bar{\delta}_i) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n);$$

(13) doit être une conséquence des équations (15), d'où t et les t_k

étant entiers, avec $t \neq 0$,

$$t\lambda_i = \sum_k t_k (\bar{\delta}_k \bar{\delta}_i) = (\gamma \bar{\delta}_i); \quad \gamma = \sum t_k \bar{\delta}_k.$$

Par suite,

$$t\Gamma_2 \sim \sum (\gamma \bar{\delta}_i) \Delta_i + ((C_a)).$$

Or, en introduisant les $\bar{\delta}$, l'homologie (7) du n° 15 devient

$$\bar{\Gamma}_2^h \sim \sum (\gamma_h \bar{\delta}_i) \Delta_i + ((C_a)) \sim 0.$$

En effet, en vertu de la manière dont on fait varier u pour engendrer les G_h , les $(\gamma_h \bar{\delta}_i)$ sont supposés calculés en prenant les cycles dans C_∞ , $\bar{\delta}_i$ y étant réduit en faisant décrire à u le prolongement de aa_i . Cela revient à calculer $(\gamma_h \bar{\delta}_i)$ pour $\bar{a} = \infty$. Comme ce nombre ne dépend pas de la position de $\bar{a}$ tant qu'il ne traverse pas les coupures aa_i , notre affirmation s'ensuit.

Ceci posé, on peut écrire une homologie

$$\gamma \sim \sum_1^{2p} \theta_h \gamma_h \pmod{C_a}.$$

Par suite,

$$t\Gamma_2 - \sum \theta_h \bar{\Gamma}_2^h \sim t\Gamma_2 \sim ((C_a)),$$

et comme $((C_a))$ ne peut être fermée à moins d'être réduite à une dimension moindre que deux, $t\Gamma_2$ est bien un cycle nul, ce qui démontre notre théorème.

19. THÉORÈME. — *Si $(\Gamma_2 \Gamma'_2)$ est divisible par e , quel que soit Γ'_2 , il existe un cycle $\bar{\Gamma}_2$ tel que $\Gamma_2 - e\bar{\Gamma}_2$ soit nul ou diviseur de zéro.*

Commençons par prendre Γ_2 sous la forme du n° 13

$$\sum \lambda_i \Delta_i + ((C_a)) + \mu_1 E_2^1.$$

Ici $\mu_1 = (\Gamma_2 C_a)$ est divisible par e , donc la condition satisfaite

par Γ_2 donne la congruence

$$\sum_1^n i \bar{\lambda}_i \bar{\lambda}_i \equiv 0 \pmod{e}.$$

Je dis que l'on peut s'arranger pour que e divise tous les λ . Tout d'abord les expressions

$$\sum_k t_k (\bar{\delta}_k \bar{\delta}_i)$$

formées avec les nombres rationnels t , si elles sont égales à des entiers, sont précisément les nombres λ d'un diviseur de la forme

$$\sum \mu_i \Delta_i + ((C_a)).$$

En effet, en les multipliant par un entier suffisamment élevé t , elles deviennent les nombres $(\gamma \bar{\delta}_i)$ relatifs à un certain cycle linéaire γ , et le cycle à deux dimensions en question, pris t fois, devient le cycle nul

$$\sum (\gamma \bar{\delta}_i) \Delta_i + ((C_a)).$$

Donc si l'on pose

$$(16) \quad \nu_i = \lambda_i + \sum_1^n k t_k (\bar{\delta}_k \bar{\delta}_i),$$

les t étant choisis de manière que les ν soient entiers, on peut remplacer les λ par les ν et il suffit de démontrer que les ν sont divisibles par e . D'ailleurs

$$(17) \quad \sum_1^n i \nu_i \bar{\lambda}_i \equiv 0 \pmod{e},$$

comme on le déduit du reste de suite de (15).

Appliquons aux $\bar{\delta}$, aux λ et aux ν une certaine transformation unimodulaire A , aux t et aux $\bar{\lambda}$ la transformation contragrédiente $\bar{A}^{-1}$ ⁽¹⁾. Désignons les éléments transformés en accentuant

(1) Ou transformation inverse de la *transposée* de A . La transposée se dénote par $\bar{A}$, d'où $\bar{A}^{-1}$ pour la contragrédiente.

ceux dont ils dérivent. Les relations (16), (17) seront maintenues, et il suffit de montrer que, pour un choix convenable des t , les v' sont tous divisibles par e .

Choisissons en particulier A de manière que la matrice

$$\| (\bar{\delta}'_k \bar{\delta}'_i) \|$$

soit canonique, ce qui est possible puisqu'elle est alternée ⁽¹⁾ (Fröbenius). Comme elle est de rang $2p - 2q$ (Chap. II, n° 19), on aura alors ⁽²⁾

$$(\bar{\delta}'_{2i-1} \bar{\delta}'_{2i}) = -(\bar{\delta}'_{2i} \bar{\delta}'_{2i-1}) = g_i > 0 \quad (i \leq 2p - 2q),$$

et les autres nombres d'intersection sont nuls. Au lieu de (15), (16), on aura maintenant

$$(15') \quad g_i \bar{\lambda}'_{2i-1} = g_i \bar{\lambda}'_{2i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 2p - 2q),$$

$$(16') \quad v'_{2i-1} = \lambda'_{2i-1} + g_i t'_{2i}, \quad v'_{2i} = \lambda'_{2i} - g_i t'_{2i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, p - q);$$

$$v'_{2p-2q+j} = \lambda'_{2p-2q+j}.$$

Puisque les g ne sont pas nuls, les λ d'indice $\leq 2p - 2q$ le sont et au lieu de (17) on aura

$$(17') \quad \sum_{2p-2q+1}^n i \quad v'_i \bar{\lambda}'_i \equiv 0 \pmod{e}.$$

Les t' sont des nombres rationnels soumis à la seule condition de rendre les v' entiers. Choisissons-les tels que les v' d'indice $\leq 2p - 2q$ soient nuls. Dans (17'), les coefficients des v' qui restent sont arbitraires. Donc cette congruence est identiquement satisfaite, d'où

$$v'_{2p-2q+j} \equiv 0 \pmod{e}.$$

Ainsi on se sera arrangé pour que les v' soient nuls ou divisibles par e , ce qui démontre notre affirmation.

(1) Si cette matrice n'était pas alternée, il faudrait introduire une seconde transformation unimodulaire B et appliquer $\bar{B}^{-1}$ aux t , mais à part cela rien ne serait changé.

(2) E. CAHEN, *loc. cit.*, p. 280.

En définitive, Γ_2^0 étant un diviseur de zéro, on pourra écrire

$$_2 + \Gamma_2^0 \sim e \left(\sum \lambda_i \Delta_i + \mu_1 E_2^1 \right) + ((C_a)),$$

où les λ ne sont pas les mêmes entiers qu'auparavant. Il suffit de répéter le raisonnement du n° 14 pour voir que $((C_a))$ est une partie de C_a prise e fois. Notre homologie peut donc être écrite

$$(18) \quad \Gamma_2 + \Gamma_2^0 \sim e \bar{\Gamma}_2 = e \left(\sum \lambda_i \Delta_i + ((C_a)) + \mu_1 E_2^1 \right).$$

$e \bar{\Gamma}_2$ est fermée, donc $\bar{\Gamma}_2$ l'est aussi. C'est par suite un cycle à deux dimensions et (18) démontre notre théorème.

COROLLAIRE. — *Les invariants e_i relatifs aux intersections des Γ_2 sont tous égaux à l'unité (voir Chap. I, n° 19).*

VII. — Un exemple : la surface image des couples de points de deux courbes algébriques ⁽¹⁾.

20. Soient C_1, C_2 deux courbes algébriques de genres p_1, p_2 , V_2 une surface algébrique en correspondance biunivoque et sans aucune exception avec les couples de points des deux courbes. Nous allons en étudier rapidement la topologie, et en particulier vérifier sur elle nos théorèmes d'intersection de cycles. Le caractère très spécial de la surface va nous permettre de le faire de façon particulièrement simple.

Réduisons C_1 et C_2 à des cellules E_2^1, E_2^2 , par des contours classiques aux rétrosections K_1, K_2 . Il en résultera une réduction de V_2 à une cellule E_4 . Soient M, m_1, m_2 un point de V_2 et les points correspondants des deux courbes. Pour avoir la frontière de E_4 , on doit faire varier m_1 sur E_2^1 et m_2 sur K_2 , puis renverser les rôles. On en tire de suite (Chap. I, n° 11, lemme) que tout cycle de V_2 est une somme des cycles obtenus ainsi :

1° *Pour les cycles linéaires, m_1 doit décrire les rétrosections de C_1 , tandis que m_2 est fixe et vice versa.* Soient γ_i^1, γ_j^2 les rétro-

⁽¹⁾ Pour une étude approfondie de ces surfaces, voir un Mémoire de M. Severi dans les *Torino Memorie*, vol. LIV, 1903.

sections des deux courbes. Il leur correspond respectivement des cycles linéaires $\Gamma_1^i, \Gamma_1^{2p_1+j}$, de V_2 , constituant un système fondamental.

2° *Pour les cycles à trois dimensions*, m_1 doit parcourir les γ_i^1 , tandis que m_2 décrit E_2^2 et *vice versa*. A $\Gamma_1^{p_1+i}, \Gamma_1^{2p_1+p_2+j}$ correspondent ainsi des cycles $\Gamma_3^i, \Gamma_3^{2p_1+j}$, et à $-\Gamma_1^i, -\Gamma_1^{2p_1+j}$ des cycles $\Gamma_3^{p_1+i}, \Gamma_3^{2p_1+p_2+j}$ ($i \leq p_1, j \leq p_2$). Avec ces notations, en apparence assez particulières, on vérifie de suite que

$$(\Gamma_1^i \Gamma_3^i) = 1, \quad (\Gamma_1^i \Gamma_3^j) = 0 \quad (i \neq j).$$

Donc la matrice carrée

$$\|(\Gamma_1^i \Gamma_3^j)\|$$

se réduit à la matrice identique. Ses diviseurs élémentaires sont tous égaux à l'unité et les cycles des systèmes fondamentaux sont tous indépendants, ce qui d'abord permet la vérification de nos théorèmes d'intersection (voir Chap. I), et ensuite démontre que

$$R_1 = R_3 = 2p_1 + 2p_2, \quad \sigma_1 = \sigma_3 = 1.$$

3° *Pour les cycles à deux dimensions*, on fait décrire à m_1 et m_2 des rétrosections, d'où $4p_1p_2$ cycles Γ_2^{ij} ($i = 1, 2, \dots, 2p_1; j = 1, 2, \dots, 2p_2$), le cycle Γ_2^{ij} étant relatif à γ_i^1 et γ_j^2 . Il y a en outre deux cycles Γ_2^1, Γ_2^2 , le premier obtenu en maintenant m_1 fixe et faisant décrire E_2^2 par m_2 , le second en renversant les rôles. Prenons alors un premier système fondamental

$$\Gamma_2^1, \Gamma_2^2; \Gamma_2^{ik}, \Gamma_2^{p_1+i, p_2+k}; \Gamma^{i, p_2+k}, \Gamma^{p_1+i, k} \\ (i = 1, 2, \dots, p_1; k = 1, 2, \dots, p_2),$$

puis un second obtenu en permutant les deux cycles de chaque couple, y compris le premier. Désignons les cycles du premier système fondamental dans un ordre quelconque par Γ_2^h , ceux correspondants du second par $\bar{\Gamma}_2^h$ ($h = 1, 2, \dots, 4p_1p_2 + 2$). On vérifie de suite que

$$(\Gamma_2^h \bar{\Gamma}_2^h) = 1; \quad (\Gamma_2^h \bar{\Gamma}_2^k) = 0 \quad (h \neq k).$$

La matrice carrée

$$\| (\Gamma_2^h \overline{\Gamma}_2^h) \|$$

se réduit donc ici aussi à l'identité, d'où vérification immédiate des théorèmes d'intersection. De plus, le rang est égal à l'ordre, donc les cycles Γ_2^h sont indépendants et

$$R_2 = 4p_1 p_2 + 2, \quad \sigma_2 = 1.$$

On a bien effectivement $\sigma_1 = \sigma_2$.



CHAPITRE IV.

L'ANALYSIS SITUS ET LES SYSTÈMES DE COURBES D'UNE SURFACE ALGÈBRIQUE.

Dans deux Mémoires très importants ⁽¹⁾, Poincaré a jeté la base d'un traitement nouveau, entièrement analytique de la théorie des surfaces algébriques. Prenant comme point de départ certaines sommes abéliennes, il arrive à caractériser par elles les courbes algébriques d'une surface donnée. Les conditions nécessaires pour qu'à un système de telles sommes corresponde effectivement une courbe algébrique ont été obtenues par lui sous forme purement analytique. Or il se trouve, comme je l'ai montré pour la première fois dans mon Mémoire couronné ⁽²⁾, que ces conditions sont susceptibles d'une interprétation particulièrement simple et élégante à l'aide de la topologie unie aux périodes d'intégrales doubles de première espèce. La voie ainsi ouverte mène à nombre de résultats, aussi intéressants que nouveaux.

On peut entrevoir dans cette direction la possibilité de réunir en une doctrine unique ce que l'on sait aujourd'hui sur les surfaces algébriques, tant au point de vue géométrique qu'au point de vue transcendant. Ce qui va suivre constituerait peut-être le premier chapitre d'une telle théorie.

I. — Intégrales simples et doubles de première espèce.

1. La définition des intégrales simples ou multiples de fonctions

⁽¹⁾ *Sur les courbes tracées sur les surfaces algébriques* (*Annales de l'École Normale*, 3^e série, vol. XXVII, 1910; *Sitzungsb. der Berliner math. Gesellschaft*, vol. X, 1911).

⁽²⁾ *Transactions of the American Math. Society*, 22^e vol., 1921. Voir à ce sujet trois Notes de M. Severi, *Rendiconti dei Lincei*, 5^e série, 30^e vol., 1921.

de variables complexes n'est pas à faire ⁽¹⁾. Nous allons nous borner à celles de fonctions rationnelles du point sur la surface V_2 des Chapitres précédents. Soient m son ordre, $f(x, y, z) = 0$ son équation. On peut envisager deux catégories d'intégrales : les intégrales *simples* ou de *différentielles totales* dues à M. Picard,

$$\int R(x, y, z) dx + S(x, y, z) dy, \quad \frac{\partial B}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial x},$$

et les intégrales *doubles*, qui remontent à Nöther et Clebsch,

$$\iint R(x, y, z) dx dy.$$

La classification des deux types se fait, à peu près, comme pour les intégrales abéliennes ⁽²⁾; ici encore il y a lieu de considérer des *périodes* relatives à des Γ , pour les intégrales simples, à des Γ_2 pour les intégrales doubles. Les intégrales de *première espèce*, simples ou doubles, presque seules à entrer en jeu dans la suite, sont toujours définies par la condition d'être partout finies. D'une discussion simple ⁽³⁾ résulte alors, pour les secondes, la forme

$$\iint \frac{Q(x, y, z)}{f_z} dx dy,$$

où Q est un polynôme d'ordre $m - 4$, adjoint à V_2 , c'est-à-dire s'évanouissant sur sa courbe double.

2. Le rôle du système $|C|$ du Chapitre II va être joué, dans ce Chapitre, par $|H|$, système des sections planes, qui se conduit comme lui. Le faisceau particulier $\{C_u\}$ sera remplacé par $\{H_y\}$, découpé par les plans $y = \text{const.}$, mais à part cela, nous garderons intactes les notations des deux Chapitres précédents. En particulier, les valeurs critiques a_j correspondront aux plans tangents parallèles au plan xz . Le choix de $|H|$ au lieu de $|C|$ ne dimi-

⁽¹⁾ Voir PICARD et SIMART, vol. I, Chap. III.

⁽²⁾ Nous supposerons connues les propriétés classiques des intégrales abéliennes. Voir à ce sujet APPELL et GOURSAT, *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales*; E. PICARD, *Traité d'Analyse*, vol. II.

⁽³⁾ PICARD et SIMART, vol. I, Chap. VII.

nua en rien la généralité et a pour unique but de faciliter la discussion.

Partons de l'intégrale de première espèce attachée à H_Y ,

$$\int \frac{P(x, y, z)}{f_z'} dx,$$

où P est adjoint à la surface et d'ordre $m - 3$ en x, z , mais peut être $m - 3 + r$ ($r \geq 0$), en x, y et z . Je dis d'abord *qu'il y a p intégrales de ce type linéairement indépendantes* (on y considère bien entendu y comme un paramètre). En effet, imposer au polynôme le plus général d'ordre $m - 3$ en x et z la condition d'être adjoint à la courbe $f(x, y, z) = 0$ revient à faire satisfaire à ses coefficients un système d'équations linéaires, algébriques par rapport aux coefficients de la courbe, donc par rapport à y , invariantes dans leur ensemble quand y varie. Les solutions fondamentales d'un tel système peuvent être choisies composées entièrement de polynômes, ce qui démontre notre affirmation.

Corollaire. — Toute intégrale de première espèce de H_Y est une combinaison linéaire d'intégrales du type ci-dessus.

3. Comportement des intégrales de première espèce de H_Y . — Les points-bases $A_1, A_2, \dots, A_m$, du faisceau $\{H_Y\}$, sont ici les points à l'infini de ces courbes. Il y a avantage à étudier plus particulièrement les intégrales ayant pour limite inférieure d'intégration l'un des points A . Posons donc

$$u(x, y, z) = \int_{A_1}^{(x, z)} \frac{P(x, y, z)}{f_z'} dx.$$

Cette fonction est évidemment holomorphe, sauf peut-être pour y infinie ou égale à une valeur critique. A l'aide de la transformation homographique

$$x = \frac{x'}{y'}, \quad y = \frac{1}{y'}, \quad z = \frac{z'}{y'},$$

on montre aisément que u , pour x fixe, est une fonction de y à pôle d'ordre $r - 1$ à l'infini. Examinons ce qui se passe pour y voisin de α_j . Supposons, pour simplifier, le nouveau point double

de H_{a_j} au point $(0, a_j, 0)$. Si (x, y, z) ne tend pas vers ce point quand y tend vers a_j , on pourra, en ajoutant à u une période convenable, la rendre holomorphe au voisinage étudié. Ce voisinage est une cellule E_i entourant un point quelconque de H_{a_j} , mais ne contenant pas son nouveau point double. Tout revient donc à examiner le comportement de u dans une E_i contenant ce point.

A une fonction holomorphe près, $u(x, y, z)$ se conduit comme

$$\int_{[\alpha, z(\alpha)]}^{(x, y)} \frac{P(x, y, z)}{f'z} dx,$$

avec $|x|$, $|y - a_j|$, $|z|$, α , $< \rho$, nombre positif fini, choisi de manière à rendre holomorphe certaines fonctions considérées plus loin.

Appliquons deux fois le théorème sur la représentation d'une fonction au voisinage d'un zéro, en ayant égard au fait que le nouveau point singulier de H_{a_j} est un point double ordinaire. On pourra écrire

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= [z^2 + 2A(x, y) \cdot z + B(x, y)] \cdot f_1(x, y, z), \\ A^2 - B &= [x^2 + 2C(y) \cdot x + D(y)] \cdot \varphi(x, y), \end{aligned}$$

où les fonctions nouvelles introduites sont toutes holomorphes quand les variables sont limitées de la manière ci-dessus, avec ρ suffisamment petit, et seules f_1 et φ ne s'y annulent pas en $(0, a_j, 0)$.

Un calcul élémentaire donne alors pour u les deux formes équivalentes suivantes, où les nouvelles fonctions écrites sont encore holomorphes dans les mêmes conditions que plus haut,

$$\begin{aligned} E(x, y) + F(x, y) \sqrt{x^2 + 2C(x) \cdot y + D(y)} \\ + \psi(y) \log [x + C(y) + \sqrt{x^2 + 2C(y)x + D(y)}], \\ E(x, y) + zF(x, y) + \psi(y) \log [z + G(x, y)]. \end{aligned}$$

Prenons en particulier pour limite supérieure d'intégration un point sur une courbe algébrique passant par le nouveau point double de H_{a_j} ; $u(x, y, z)$ devient alors une fonction de y seule. Pour ρ convenable, x et z seront des séries entières en $(y - a_j)^{\frac{1}{q}}$, q entier, et l'on pourra affirmer que le produit de u

par $(y - a_j)$ tend vers zéro avec $(y - a_j)$. En effet, il ne peut y avoir de doute que pour le produit par le terme logarithmique. Mais, à une fonction holomorphe tendant vers zéro près, ce produit est égal à une constante multipliée par

$$(y - a_j)^s \log(y - a_j) \quad (s \text{ entier positif}),$$

et l'on sait que cette expression tend bien vers zéro avec $(y - a_j)$. Cette remarque nous sera fort utile plus loin.

4. **Comportement des périodes.** — Appliquons ce qui précède aux périodes de l'intégrale u . Soit d'abord $\Omega_j(y)$ celle relative au cycle évanouissant δ_j . Comme il est invariant en a_j , $\Omega_j(y)$ est uniforme au voisinage de ce point. De plus, $\Omega_j(y) \cdot (y - a_j)$ tend vers zéro avec $y - a_j$, donc $\Omega_j(y)$ est holomorphe au point a_j . Soient γ un cycle linéaire quelconque de H_Y , $\omega(y)$ la période correspondante. La fonction

$$\omega'(y) = \omega(y) - \frac{(\gamma \delta_j)}{2\pi i} \Omega_j(y) \log(y - a_j)$$

a exactement les mêmes propriétés que $\Omega_j(y)$. Donc elle est aussi holomorphe en a_j . Par suite, au voisinage de ce point,

$$\omega(y) = \omega'(y) + \frac{(\gamma \delta_j)}{2\pi i} \Omega_j(y) \log(y - a_j),$$

résultat obtenu pour la première fois par M. Picard, à l'aide de l'équation différentielle aux périodes (équation de Picard-Fuchs).

L'expression

$$(1) \quad \omega(y) - \sum \frac{\lambda_j}{2\pi i} \int_a^{\gamma_j} \frac{\Omega_j(Y) dY}{Y - y}, \quad \lambda_j = (\gamma \delta_j)$$

est holomorphe pour toute valeur finie de y . En effet, on voit d'abord, comme pour $\Omega_j(y)$ et $\omega'(y)$, qu'elle l'est au voisinage de a_j . Il suffit donc d'examiner ce qui se passe au voisinage de a . Lorsque y tourne autour de ce point, (1) s'accroît de

$$\sum \lambda_j \Omega_j(y).$$

Cet accroissement n'est autre chose que la période de u par rap-

port au cycle

$$\gamma' \sim \sum \lambda_j \delta_j = \sum (\gamma \delta_j) \delta_j.$$

Or dans H_a ce cycle représente l'accroissement de γ quand γ décrit le contour formé par la suite des lacets aa_j . Ce contour est déformable, sans traverser les points critiques, en un cercle de grand rayon. Comme V_2 est en position générale par rapport à l'infini, $\gamma = \infty$ n'est pas une valeur critique, et l'accroissement correspondant de γ , qui n'est autre que la position de γ' dans une H_j quelconque, est nul. La période correspondante de l'intégrale de première espèce u est donc nulle, ce qui montre que (1) est uniforme au voisinage de a . On vérifie de suite que son produit par $\gamma - a$ tend vers zéro avec $\gamma - a$, donc enfin (1) est bien holomorphe en a aussi.

Les intégrales dans (1) tendent vers zéro quand γ devient infini. Enfin le point à l'infini est pour $\omega(\gamma)$ un pôle d'ordre $r - 1$ (n° 3). C'en est donc un de même nature pour (1) qui est alors nécessairement un polynôme de degré $r - 1$, $B(\gamma)$. Nous avons par suite pour $\omega(\gamma)$ la représentation valable dans tout le plan, due à Poincaré,

$$\omega(\gamma) = \sum \frac{\lambda_j}{2\pi i} \int_a^{\infty} \frac{\Omega_j(Y)}{Y - \gamma} dY + B(\gamma).$$

Corollaire. — Les périodes de u par rapport aux $2q$ cycles invariants sont des polynômes de degré $r - 1$. Pour $r = 0$, c'est-à-dire pour P d'ordre $m - 3$ en x, y, z , ces périodes sont nulles.

§. Ce qui précède permet de montrer que

$$2\pi i \cdot \psi(\gamma) = \Omega_j(\gamma),$$

où ψ est la fonction du n° 3. En effet, soit δ'_j un cycle tel que $(\delta_j \delta'_j) = 1$. La période correspondante, $\omega(\gamma)$, se conduit au voisinage de a_j comme

$$\begin{aligned} & 2G(\beta, \gamma) \sqrt{\beta^2 + 2C \cdot \beta + D} + 2\psi(\gamma) \\ & \times \log(\beta + \sqrt{\beta^2 + 2C \cdot \beta + D}) + \text{une fonction holomorphe,} \end{aligned}$$

β étant l'un des points de branchement de la fonction $z(x)$ qui coïncident pour $\gamma = a_j$. Or β annule le radical. De plus, au voisi-

nage de a_j ,

$$\beta(\gamma) = (\gamma - a_j)^{\frac{1}{2}} \sum_0^{\infty} c_s (\gamma - a_j)^{\frac{s}{2}} \quad (c_0 \neq 0).$$

En effet, puisque les axes sont arbitraires, le nouveau point double de H_{a_j} est un point ordinaire de la courbe simple d'intersection de $f'_z = 0$ avec notre surface; donc a_j est un point de branchement ordinaire pour la fonction algébrique $\beta(\gamma)$, ce qui justifie ce développement.

On aura par suite

$$\omega(\gamma) = \omega'(\gamma) + \psi(\gamma) \log(\gamma - a_j),$$

ω' étant holomorphe au point a_j . En identifiant avec l'expression de M. Picard, on obtient bien

$$2\pi i \psi(\gamma) = \Omega_j(\gamma).$$

On en conclut l'expression suivante pour u , valable au voisinage de a_j ,

$$u(x, \gamma, z) = F(x, \gamma) + z G(x, \gamma) + \frac{\Omega_j(\gamma)}{2\pi i} \log[z + H(x, \gamma)].$$

6. Tout ce que nous venons de dire s'applique presque sans changement à une intégrale

$$\int \frac{P(x, \gamma, z)}{f'_z} dx,$$

où P est adjoint, d'ordre $> m - 3$, non seulement en x, γ, z , mais aussi en x, z , de sorte que l'intégrale n'est plus de première espèce. En particulier, les périodes ont la forme que nous avons déjà donnée. La seule différence est qu'il peut y avoir $m - 1$ résidus à l'infini, eux aussi polynômes en γ . Effectivement, dans la discussion, nous ne nous sommes servis nulle part de ce que l'intégrale est de première espèce, mais uniquement de ce qu'elle est finie à distance finie. Au lieu de A_1 comme limite inférieure d'intégration, on pourra prendre un point variable d'intersection de H_γ avec une courbe algébrique quelconque.

7. En se basant sur ce que nous venons de dire, on montre aisément

ment ⁽¹⁾ qu'il existe une intégrale de différentielles totales *de seconde espèce* (c'est-à-dire se conduisant partout comme une fonction rationnelle), à périodes quelconques par rapport aux cycles invariants. Pour le démontrer on n'a besoin de se servir d'aucune propriété particulière de ces cycles. On en déduit ensuite que s'il y a r cycles invariants, la surface possède r intégrales distinctes de différentielles totales de seconde espèce, c'est à-dire dont aucune combinaison linéaire n'est une fonction rationnelle.

Si donc on admet le théorème du Chapitre II, n° 13, et les propriétés qu'on en tire pour les cycles de C_u , ou bien ici de H_γ , on en déduit que V_2 possède $2g$ intégrales distinctes de seconde espèce. Mais, remarque fort intéressante, la propriété ci-dessus fournit une démonstration transcendante du théorème topologique. Supposons en effet que

$$\gamma \sim \sum \lambda_j \delta_j$$

soit un cycle invariant. Il existe une intégrale de différentielles totales de seconde espèce J à période $+1$ par rapport à γ . D'un autre côté, J étant de seconde espèce, sa période par rapport à δ_j ne change pas quand on déforme ce cycle d'une manière quelconque dans H_γ , en même temps que γ varie. Or, de cette manière, on peut réduire δ_j à un point ordinaire de la surface, le nouveau point double de H_{u_j} . La période correspondante de J doit donc être nulle, aussi bien que celle relative à γ , contradiction évidente qui établit le théorème.

II. — Les courbes algébriques et leurs sommes abéliennes.

8. **Formules de Poincaré.** — Donnons-nous (nous avons vu qu'il est possible de le faire) p intégrales distinctes de première espèce, telles que u considérée plus haut, soit

$$u_h = \int \frac{P_h(x, y, z)}{f_z} dx \quad (h = 1, 2, \dots, p),$$

où P_h sera maintenant supposé d'ordre $m - 3 + q_h$.

(1) PICARD et SIMART, vol. I, p. 100.

Soit D une courbe algébrique quelconque, coupant H_y aux points $m_1, m_2, \dots, m_v$. D'ailleurs ces points n'ont pas besoin de comprendre la totalité du groupe DH_y , comme nous désignerons dorénavant l'ensemble des points d'intersection des deux courbes. On pourrait en fait se limiter à l'ensemble des points variables y compris seulement quelques-uns des points fixes. L'essentiel pour la suite, c'est d'avoir sur H_y un groupe de points déterminés rationnellement dans leur ensemble, en fonction de y . Ces points fixes, remarquons-le de suite, ne peuvent être que les points A_i , pris chacun un certain nombre de fois. Ainsi pour $D = H_y$, on sera amené à considérer comme groupe particulier de points m_k , un quelconque des A_i .

Ceci étant posé, on peut appliquer sans la moindre modification, aux sommes abéliennes

$$v_h(y) = \sum_1^v \sum_k \int_{A_i}^{m_k} du_h,$$

le raisonnement du n° 4, relatif au comportement des périodes. On obtient ainsi les *formules de Poincaré*, fondamentales pour ce qui va suivre,

$$(2) \quad v_h(y) = \sum_j \frac{\lambda_j}{2\pi i} \int_a^{a_j} \frac{\Omega_{hj}(Y)}{Y - y} dY + B_h(y),$$

où Ω_{hj} est la période de u par rapport à δ_j et B_h est un polynome de degré $q_h - 1$. Quant aux λ_j , ils ont ici le sens suivant : Lorsque y tourne autour de a_j les chemins d'intégration $A_i m_k$ sont ramenés à des positions nouvelles; leur variation totale est un multiple de δ_j . En comparant avec l'accroissement $\lambda_j \Omega_{hj}(y)$ de $v_h(y)$ dans les mêmes conditions, on voit de suite que cette variation est précisément $\lambda_j \delta_j$.

Soit M_3 la multiplicité engendrée par les chemins $A_i m_k$ quand y varie. L'examen de ses frontières donne

$$M_3 \equiv D - \sum \lambda_j \Delta_j - (H_a);$$

on en tire

$$(3) \quad D \sim \sum \lambda_j \Delta_j + (H_a),$$

homologie qui indique clairement la relation entre les entiers λ et la courbe D.

Une conséquence immédiate de (3) est (Chap. III, n° 10),

$$\sum \lambda_j \delta_j \sim 0.$$

Les périodes correspondantes des u doivent être nulles, d'où

$$\sum \lambda_j \Omega_{hj}(\gamma) = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, p).$$

Comme nous le verrons plus loin (n° 15), ces relations expriment simplement que les ν ne dépendent pas de a .

9. Discussion relative aux points à l'infini. — Tout ce qui précède s'applique à leurs sommes abéliennes, comme nous l'avons déjà remarqué. Ils donnent cependant lieu à quelques observations spéciales, intéressantes.

Tout d'abord, si le groupe de points m_k se réduit à une somme de multiples des A_i , il faudra, dans l'homologie (3), remplacer D par zéro. D'ailleurs, réciproquement, supposons que, dans (3), il faille remplacer D par zéro. Il y aura alors une

$$M_3 \equiv \sum \lambda_j \Delta_j + (H_a) \sim 0.$$

Nous avons vu (Chap. III, n° 11) qu'alors M_3 est le lieu d'une ligne

$$\gamma + \sum_{i=2}^m t_i A_1 A_i,$$

où γ est un cycle linéaire convenable de H_γ . Les λ correspondront donc aux sommes abéliennes

$$\nu_h(\gamma) = \int_{\gamma} du_h + \sum_{i=2}^m t_i \int_{A_1}^{A_i} du_h,$$

donc à

$$t_1 A_1 + t_2 A_2 + \dots + t_m A_m,$$

où t_1 est un entier quelconque.

Je dis que les sommes abéliennes relatives à

$$t_1 A_1 + t_2 A_2 + \dots + t_m A_m,$$

où l'un au moins des t d'indice > 1 n'est pas nul, ne peuvent être égales à des périodes. En effet, nous avons fait correspondre à $A_i (i > 1)$ un cycle nul, frontière du lieu de la ligne $A_1 A_i$,

$$\Gamma_2^i = \sum \lambda_j \Delta_j + ((H_a)) + E_2^i - E_2^1.$$

Ici $((H_a))$, d'après nos conventions partie de H_a sans points A_i , est simplement une partie finie de la courbe. Quant aux E_2^i , ce sont des cellules contenant les A_i et que nous ne pouvons plus qualifier comme très petites. Pour préciser on prendra cette fois les m cellules de H_a représentant l'ensemble des points dont l' x est extérieur à un cercle de grand rayon. On aura ainsi

$$(4) \quad H_a = ((H_a)) + \sum_1^m t_i E_2^i.$$

Aux périodes correspond un cycle à deux dimensions nul,

$$\Gamma_2 = \sum \lambda_j \Delta_j + ((H_a)).$$

Si notre affirmation n'est pas correcte, les entiers λ relatifs à un certain cycle

$$\Gamma_2 + \sum t_i \Gamma_2^i$$

doivent tous être nuls. Ce cycle devra donc se réduire à

$$((H_a)) + \sum_2^m t_i (E_2^i - E_2^1);$$

par suite, il devra être un multiple de H_a . En comparant avec (4), on en déduit

$$t_2 = t_3 = \dots = t_m = -(t_1 + t_2 + \dots + t_m) = t,$$

d'où $mt = 0$, $t = 0 = t_i$, ce qui démontre notre affirmation.

III. — Conditions d'existence des courbes algébriques.

10. Les expressions (2) étant données, leur correspond-il une courbe algébrique? Ou, si l'on préfère, peuvent-elles servir à déterminer rationnellement un groupe unique de points sur H_Y ?

Nous allons chercher à déterminer rationnellement sur H_Y un groupe de p points $m_k(x_k, y, z_k)$, tels que

$$(5) \quad \sum_k^p \int_{\Lambda_k}^{m_k} du_k = \sum \frac{\lambda_j}{2\pi i} \int \frac{\Omega_{hj}(Y)}{Y - y} dY + B_h(y) \quad (h=1, 2, \dots, p).$$

La discussion va nous fournir des conditions suffisantes pour l'existence d'une solution de ce type spécial. Il se trouvera que ces conditions sont nécessaires pour l'existence d'une solution quelconque, qu'elle soit de type spécial ou non. La question proposée se trouvera ainsi complètement résolue.

11. Et d'abord, pour y_0 finie, donnée, il ne peut être question de déterminer un groupe de points sur H_{y_0} , à partir des sommes abéliennes $v_h(y_0)$, que si les polynômes $P_h(x, y_0, z)$ sont linéairement indépendants (théorème d'inversion). S'ils ne le sont pas, c'est qu'il y a des constantes c_h , telles que

$$(6) \quad \sum c_h P_h(x, y, z) = (y - y_0)^s P(x, y, z).$$

Parmi les polynômes qui figurent à gauche, c'est-à-dire dont le coefficient c n'est pas nul, soit P_h celui de degré maximum. $P(x, y, z)$ est adjoint d'ordre $m-3$ en x, z , de degré total inférieur à celui de P_h . Remplaçons P_h par P , puis continuons de même tant qu'il reste des valeurs y_0 . Ce procédé a certainement un terme, car chaque fois qu'on l'applique, on abaisse le degré d'un des polynômes. Finalement, on en aura donc p qui ne satisferont à aucune relation (6) pour y finie. Nous supposons qu'ils correspondent précisément aux intégrales u_h . Parmi ces polynômes, il y en aura q' , soient $P_1, P_2, \dots, P_{q'}$, de degré total $> m-3$, les autres étant de degré $\leq m-3$. Pour ces derniers, il faudra dans (5) remplacer les polynômes B_h par zéro. Nous verrons

d'ailleurs plus loin que $q' = q$, et que, de plus, les P d'indices $\leq q'$ sont de degré total $m - 2$.

12. Le déterminant fonctionnel des équations (5) par rapport aux x_k (on suppose les z_k fonctions connues des x_k) est égal à

$$(7) \quad \left| \frac{P_h(x_k, y, z_k)}{f'_{z_k}} \right|.$$

Lorsque y est arbitraire, les équations (5) peuvent être résolues par rapport aux points m_k , et si pour une solution le déterminant s'annule, il y en aura une infinité. Soit p' le rang du déterminant. On sait qu'on pourra alors se donner $p - p'$ des points m_k (nous les ferons coïncider avec A_1) et en déduire les autres à l'aide de p' des équations (5) convenablement choisies. Tout reviendra alors à discuter un système de moins de p équations, mais à part cela, rien ne sera changé. Nous supposons donc que pour y arbitraire, la solution fournie par les équations (5) est unique et nous allons en discuter la nature.

13. Il est clair d'abord que toute fonction rationnelle et symétrique des coordonnées des m_k , $R(x_1, x_2, \dots, x_p; z_1, z_2, \dots, z_p)$ est une fonction uniforme de y dans tout le plan. Pour que les m_k engendrent une courbe algébrique, il faut et il suffit que R soit *méromorphe pour toute valeur finie ou infinie de y* . Elle ne peut cesser de l'être que pour y voisin des points critiques, du point a , de l'infini, ou enfin des valeurs pour lesquelles le déterminant (7) s'annule. Nous allons examiner ces diverses circonstances en commençant par la dernière.

1° Pour $y = y_0$, non critique, la solution de (5) fait évanouir le déterminant (7). — Au voisinage de y_0 , les équations (5) sont de la forme

$$F(x_1, z_1, \dots, x_p, z_p; y) = 0,$$

les F étant holomorphes en leurs variables. Les solutions de ces équations sont donc des fonctions *algébroides* de y au voisinage de y_0 , ou, plus précisément, une quelconque des coordonnées x_k , z_k est racine d'une équation

$$X^r + c_1(y).X^{r-1} + \dots + c_r(y) = 0,$$

à coefficients holomorphes au voisinage de γ_0 . La fonction symétrique R est donc certainement méromorphe au point γ_0 .

14. 2^e Comportement aux points critiques. — Soustrayons des seconds membres des équations (5) les périodes par rapport au cycle $\lambda_j \delta'_j$, δ'_j étant toujours le cycle tel que $(\delta'_j \hat{\alpha}_j) = 1$, et dont la propriété essentielle est de s'accroître de $\hat{\alpha}_j$ quand γ tourne autour de a_j . Les seconds membres sont alors holomorphes au voisinage de a_j , sans que cependant les solutions x_k, z_k en soient changées pour cela. Il s'agit de montrer que, quelle que soit la distribution des points m_k , pour $(\gamma - a_j)$ suffisamment petit, les solutions des équations (5) restent algébroides au voisinage de a_j . Supposons ici encore que le nouveau point double de H_{a_j} est $(0, a_j, 0)$. Il n'y a de doute que si pour certains des m_k , soient $m_1, m_2, \dots, m_s$, les x_k, z_k sont suffisamment petits. En se reportant à ce que nous avons dit sur le comportement des u au voisinage de a_j , on voit que le système (5) peut être remplacé par un autre dont une quelconque des équations aura la forme

$$\sum_1^s k \log[z_k + H(x_k, \gamma)] = \frac{\Phi(x_1, x_2, \dots, x_p; z_1, z_2, \dots, z_p; \gamma)}{\Omega_j(\gamma)},$$

où Ω_j est une quelconque des Ω_{hj} , et Φ est holomorphe en ses variables quand les quantités $|x_k|, |z_k|, |\gamma - a_j|$ sont suffisamment petites.

Au pis aller, $p - 1$ des u tendent vers des intégrales de première espèce de H_{a_j} quand γ tend vers a_j et une au moins deviendra de troisième espèce. Le nouveau point double est à tangentes distinctes, donc il compte comme deux points distincts de H_{a_j} : ces deux points seront les seuls points logarithmiques de l'intégrale de troisième espèce nouvelle, les périodes logarithmiques correspondantes étant $\pm \Omega_j(a_j)$. Par suite, $\Omega_j(a_j) \neq 0$. Donc en remplaçant au besoin les u par des combinaisons linéaires convenables, on pourra s'arranger pour que $\Omega_{hj}(a_j) \neq 0$ quel que soit h . Les fonctions

$$\frac{\Phi}{\Omega_j(\gamma)} = \Psi$$

se conduiront alors comme Φ dans les mêmes conditions que plus

haut. Les équations (5) seront donc équivalentes à un système d'équations de type

$$\prod_{k=1}^s \prod_{j=1}^p [z_k + H(x_k, y)] = e^\Psi,$$

dont les solutions sont bien algébroides dans la région considérée.

15. 3° Comportement au point a . — Il sera certainement à souhait si les seconds membres des équations (5) sont indépendants de a . En écrivant que leurs dérivées par rapport à a sont nulles, on trouve

$$(8) \quad \sum_j \lambda_j \Omega_j(a) = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, p).$$

Ceci indique que la période de toute intégrale de première espèce de H_a par rapport au cycle

$$\sum \lambda_j \delta_j$$

doit être nulle, donc il forme frontière, soit

$$(9) \quad - (H_a) \equiv \sum \lambda_j \delta_j,$$

et, par suite,

$$\Gamma_2 \sim \sum \lambda_j \Delta_j + (H_a)$$

est un cycle à deux dimensions. Ces conditions, *suffisantes* pour le comportement désiré au point a , sont aussi *nécessaires* (n° 8). Elles expriment simplement que les entiers λ déterminent un certain cycle à deux dimensions.

16. 4° Comportement à l'infini. — Appliquons de nouveau la transformation homographique du n° 3. Une quelconque des équations (5) deviendra (le sens des lettres accentuées est évident)

$$\sum_{k=1}^p \int_{\Delta'_1}^{(x'_k, z'_k)} \frac{P'_h(x', y', z')}{F'_{z'}} dx' \\ = y'^{q_h} \sum \frac{\lambda_j}{2\pi i} \int_a^{a_j} \frac{\Omega_{hj}(Y)}{Y y' - 1} dY + y'^{q_h-1} B_h\left(\frac{1}{y'}\right) \quad (h = 1, 2, \dots, p).$$

Lorsque $q_h \geq 0$ le second membre est holomorphe au point $y' = 0$. Soit $q_h < 0$. Le polynome B_h disparaît alors, et il faut trouver les conditions sous lesquelles le second membre reste holomorphe. Nous pouvons supposer $a \neq 0$, de sorte que, pour un choix convenable des chemins aa_j , $|Y|$ sera toujours supérieur à une certaine limite. Le coefficient de y'^{q_h} est développable en série entière en y' . Pour que le second membre soit holomorphe, il faut et il suffit que les $-q_h$ premiers termes de cette série s'annulent. Ceci fournit les relations

$$(10) \quad \sum_j \lambda_j \int_a^{a_j} Y^s \Omega_{hj}(Y) dY = 0 \quad (s = 0, 1, 2, \dots, -q_h - 1).$$

Le polynome $y^s P_h(x, y, z)$, ($s < -q_h$) est adjoint d'ordre $m - 3 + q_h + s \leq m - 4$, donc

$$(11) \quad \int \int \frac{y^s P_h(x, y, z)}{f'_z} dx dy$$

est de première espèce. Je dis que (10) est sa période par rapport au cycle $-\Gamma_2$. En effet,

$$\Gamma_2 \sim \sum \lambda_j \Delta_j + ((H_a)) + \sum_1^m i t_i E'_2.$$

Or d'abord

$$\int \int_{\Delta_j} = - \int_a^{a_j} Y^s \Omega_{hj}(Y) dY.$$

Ensuite, en tous les points de $((H_a))$ l'intégrale sous forme (11), ou bien sous la forme équivalente

$$\int \int \frac{y^s P_h(x, y, z)}{f'_x} dy dz,$$

a son coefficient différentiel fini, avec $dy = 0$. Donc

$$\int \int_{((H_a))} = 0.$$

Enfin, transformons homographiquement V_2 de manière que E'_2 devienne une petite cellule E'_2 , située à distance finie dans la sec-

tion par le plan $y = 0$. On aura

$$\int \int_{E_2'} = \int \int_{E_2} = 0,$$

l'intégrale étendue à E_2' étant la transformée de (11).

On en conclut que la période de l'intégrale (11) par rapport à $-\Gamma_2$ est égale à la valeur de l'intégrale étendue à

$$\sum \lambda_j \Delta_j,$$

c'est-à-dire à l'expression (10), comme nous l'avions affirmé.

D'ailleurs soient

$$(12) \quad \int \int \frac{Q(x, y, z)}{f_z'} dx dy$$

une intégrale double quelconque de première espèce,

$$(13) \quad \int \frac{Q(x, y, z)}{f_z'} dx$$

l'intégrale abélienne correspondante attachée à H_y , Ω_j la période de (13) relative à ∂_j . Supposons que les ν dérivent, à la manière du paragraphe II, d'une courbe algébrique absolument quelconque D. On aura alors

$$\sum_k \int_{\Lambda_k}^{(x_k, z_k)} \frac{Q(x, y, z)}{f_z'} dx = \sum_j \frac{\lambda_j}{2\pi i} \int_a^{a_j} \frac{\Omega_j(Y)}{Y - y} dY,$$

et, en appliquant la même transformation homographique que plus haut, on trouve aisément que

$$\frac{1}{y'} \sum_j \frac{\lambda_j}{2\pi i} \int_a^{a_j} \frac{\Omega_j(Y)}{Y y' - 1} dY$$

doit être holomorphe au point $y' = 0$, et que par suite

$$\sum_j \lambda_j \int_a^{a_j} \Omega_j(Y) dY = 0,$$

c'est-à-dire que la période de l'intégrale arbitraire de première espèce (12) par rapport à Γ_2 doit être nulle. Comme conclusion de toute cette discussion, nous sommes donc en mesure d'énoncer le théorème d'existence suivant :

THÉORÈME D'EXISTENCE. — *Pour que les fonctions φ soient les sommes abéliennes d'une courbe algébrique D , il faut et il suffit que les λ appartiennent à un cycle Γ_2 et que, de plus, les périodes des intégrales doubles de première espèce par rapport à Γ_2 soient nulles. Le cycle $\Gamma_2 \sim D$.*

Remarque. — Aucune condition particulière n'est imposée aux polynômes B_k , donc leurs coefficients sont arbitraires. D'une façon plus précise, si à un système de valeurs de ces coefficients correspond une courbe algébrique, il en correspondra une aussi à tout autre.

17. Il est particulièrement intéressant, eu égard à leur importance, de retrouver les conditions du n° 16, en se mettant sous un point de vue un peu différent.

S'il correspond aux φ une courbe algébrique D , on devra avoir (n° 8)

$$D \sim \sum \lambda_j \Delta_j + (H_a).$$

Dans certains cas exceptionnels, il faudra mettre $D = 0$, mais alors la période de (12) par rapport au cycle au second membre est nulle, et la condition considérée est bien satisfaite.

Dans le cas général, soit $\varphi(x, y) = 0$ la projection de D . Isolons sur D des cellules entourant les points où $\varphi'_x = 0$, et soit (D) la partie restante. En effectuant s'il le faut une transformation homographique convenable, on pourra s'arranger pour que $D - (D)$ soit une multiplicité finie, très petite, ne comprenant aucun des nouveaux points doubles des H_{a_j} . Alors soit sous la forme (12), soit sous la forme équivalente

$$\iint \frac{Q(x, y, z)}{f'_x} dy dz,$$

l'intégrale aura son élément différentiel fini en tous les points de $D - (D)$, et par suite

$$\iint_{D - (D)}$$

est aussi petite que l'on veut en valeur absolue. D'ailleurs

$$\iint_{(D)} = \iint_{(D)} \frac{Q(x, y, z)}{f'_z \varphi'_x} d\varphi dy = 0.$$

Donc la période par rapport à D , aussi petite que l'on veut, est nécessairement nulle. Ceci revient à vérifier les conditions du n° 16.

IV. — Intégrales de différentielles totales de première espèce.

18. Supposons que les v_h satisfassent aux conditions d'existence. Il en sera encore ainsi quand les coefficients des B_h varient, coefficients que nous désignerons dans un ordre quelconque par $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{q''}$. Le rang du déterminant fonctionnel (7) du n° 12, qui varie de façon continue avec les ξ , aura une valeur fixe $p' \leq p$, quand ces ξ ont des valeurs arbitraires, et aux v_h correspondra alors une courbe algébrique D , coupant H_γ en p' points variables, dont les fonctions sont les sommes abéliennes.

D'un autre côté, à D correspond tout système de valeurs des ξ , obtenu en ajoutant au précédent un système de coefficients appartenant à des périodes *polynomes en y* . Or, il n'y a que $2q$ périodes distinctes de cette nature, les périodes relatives aux cycles invariants (n° 4, corollaire). Considérons avec Poincaré, dont nous suivons ici le raisonnement, les ξ comme des coordonnées cartésiennes de point d'un $S_{q''}$ complexe. Cet espace, à $2q''$ dimensions réelles, pourra être subdivisé en prismes congruents, chacun limité par $4q$ hyperplans parallèles et contenant un point unique relatif à D . Mais à toute D correspond un système de ξ finis. Donc nos prismes doivent être finis, *ce qui exige $q'' = q$* .

Puisqu'il y a exactement q' intégrales u aux polynomes B non nuls, la série de points découpée par les D sur une H_γ fixe quelconque, soit H_{y_0} , dépend de q' paramètres arbitraires, les valeurs des quantités $v_1(y_0), v_2(y_0), \dots, v_q(y_0)$. Ces quantités sont bien arbitraires, puisque les termes constants des polynomes $B_h(y)$ le sont. Le raisonnement que nous venons d'appliquer plus haut à D s'applique à la série de points, d'où cette fois $q = q'$, et enfin $q' = q'' = q$.

Ainsi le nombre de coefficients variables, dans les polynomes B_h non identiquement nuls, est égal au nombre même de ces polynomes. D'où, résultat d'une importance capitale, *ces polynomes se réduisent tous à des constantes, et leur nombre est égal à q* .

Comme corollaire, il y a tout juste q polynomes $P_h(x, y, z)$

d'ordre $m - 2$ et les autres sont d'ordre $m - 3$, au plus, résultat fort intéressant, dû à M. Picard. Sous une autre forme, on peut dire que toute intégrale de première espèce de H_γ dépend linéairement de celles du type

$$\int \frac{P(x, y, z)}{f'z} dx,$$

où P est adjoint à V_2 , d'ordre $m - 3$ en x, z et $m - 2$ en x, y, z .

19. Les fonctions symétriques des coordonnées des points variables du groupe DH_{y_0} sont des fonctions $2q$ -uplement périodiques de $v_1(y_0), v_2(y_0), \dots, v_q(y_0)$, c'est-à-dire, grâce à

$$v_h(y_0) = \sum \frac{\lambda_j}{2\pi i} \int_a^{a_j} \frac{\Omega_{hj}(Y)}{Y - y_0} dY + \xi_h \quad (h \leq q),$$

des fonctions $2q$ -uplement périodiques des ξ . Ces fonctions sont attachées à la même matrice aux périodes que les u . Puisque dans les expressions ci-dessus les λ sont fixes, les seules périodes effectives des fonctions en question sont indépendantes de y_0 ; ce sont donc des périodes par rapport aux cycles invariants, celles par rapport aux δ étant au contraire toutes nulles. Ainsi la matrice aux périodes de $u_1, u_2, \dots, u_q$ par rapport à $2q$ cycles invariants distincts est aussi celle d'un système de fonctions $2q$ -uplement périodiques de q variables.

En vertu d'un résultat fondamental de la théorie de ces fonctions (Poincaré, Picard, Scorza) ⁽¹⁾, on peut alors se donner q intégrales de première espèce $u'_h(y_0)$, ou bien, en remplaçant y_0 par y , $u'_h(y)$ ($h = 1, 2, \dots, q$), à périodes, nulles par rapport aux δ , égales à celles, constantes, des u de même indice par rapport aux cycles invariants. Pour les u_{q+h} , ce sont, au contraire, les périodes par rapport aux cycles invariants qui sont nulles. Donc $u'_1, u'_2, \dots, u'_q, u_{q+1}, \dots, u_p$ sont linéairement indépendantes. Soit

$$u'_h = \sum_{k=1}^p c_{hk}(y) u_k \quad (h = 1, 2, \dots, q).$$

(1) Voir le Mémoire de M. Scorza dans les *Rendic. del Circolo Mat. di Palermo* de 1916.

Les c_{hk} devront satisfaire au système

$$(14) \quad \sum_1^p c_{hk}(\gamma) \Omega_{kj}(\gamma) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

et en outre, pour h fixe, à $2q$ équations linéaires, exprimant que les périodes des u' par rapport aux cycles invariants sont constantes. Quand γ décrit un chemin fermé quelconque, toute équation (14) est, au pis aller, remplacée par une somme de plusieurs autres; par suite, les c sont uniformes. Mais on peut préciser davantage.

Soient d'abord $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$ les p premières rétrosections d'une courbe de genre p . Le déterminant des périodes correspondantes de p intégrales de première espèce linéairement indépendantes n'est pas nul, car par exemple pour les intégrales normales il est $\neq 0$. Ajoutons aux γ un petit circuit entourant un point A de la courbe et aux intégrales une de troisième espèce avec A pour point logarithmique : cela reste toujours vrai. On peut même remplacer les $p + 1$ intégrales par autant de combinaisons linéaires distinctes sans rien changer.

Prendre H_γ pour courbe avec $\gamma_1 = \delta_j$, choix possible à cause du type de δ_j . La première situation ci-dessus se présente pour γ non critique et les intégrales u , la seconde pour $\gamma = a_j$ et les mêmes intégrales, avec toutefois $p - 1$ au lieu de p . Donc le déterminant $e(\gamma)$ des périodes relatives aux γ est $\neq 0$ pour γ non critique et aussi pour $\gamma = a_j$. Exprimons maintenant que les périodes de u'_h relativement aux γ sont constantes. Il en résulte pour les p fonctions c_{hk} autant d'équations linéaires à seconds membres constants, avec $e(\gamma)$ pour déterminant des coefficients des inconnues. Par conséquent, ces fonctions sont finies pour γ finie, non critique, ainsi que pour $\gamma = a_j$, donc enfin pour toute valeur finie de γ sans exception. Il suffit d'écrire les solutions pour voir que c_{hk} se conduit comme un polynôme de degré un lorsque $k > q$, comme une constante autrement. C'est donc un polynôme de degré un dans le premier cas, une constante dans le second.

Conclusion immédiate de cette discussion : les u' sont de même type que les q premières u . D'ailleurs elles sont de première espèce pour toute H_γ , γ compris la courbe à l'infini. Pour cette dernière,

c'est l'affaire d'une transformation homographique convenable. Quant aux H_{a_j} cela résulte de suite de ce que les périodes par rapport aux δ sont nulles, de sorte que quand y tend vers a_j les u' n'acquièrent pas de singularités logarithmiques. Prenons plus spécialement

$$u'_h = \int_{A_1}^{(x,z)} du'_h.$$

Cette fonction est définie en chaque point de V_2 , du moins à des périodes par rapport aux cycles linéaires de la surface près. En tant que fonction de point sur V_2 , u'_h est holomorphe partout et ses dérivées partielles par rapport à x ou y sont uniformes, sans singularités essentielles, donc rationnelles. *Par suite u'_h est une intégrale de différentielles totales de première espèce de V_2 , d'où, avec Poincaré, ce théorème capital en Géométrie algébrique, dû à MM. Castelnuovo, Enriques et Severi :*

Le nombre d'intégrales de différentielles totales de première espèce linéairement indépendantes est égal à l'irrégularité q .

20. Dorénavant nous prendrons, pour nos q premières intégrales u , les intégrales de différentielles totales de la surface. Les sommes abéliennes auront alors la forme

$$\begin{aligned} v_h(y) &= \xi_h \quad (h = 1, 2, \dots, q); \\ v_{q+k}(y) &= \sum \frac{\lambda_j}{2\pi i} \int_u^{y_j} \frac{\Omega_{q+k,j}(Y)}{Y-y} dY \quad (k = 1, 2, \dots, p-q). \end{aligned}$$

V. — Systèmes linéaires et systèmes continus de courbes algébriques.

21. *Deux courbes algébriques, C, D, aux mêmes sommes abéliennes sont contenues totalement dans un même système linéaire.*

Poincaré, à qui ce théorème est dû, impose aux courbes la condition d'avoir même ordre. Cette restriction est inutile, comme nous allons le voir.

Soient ν, ν' les ordres de C, D avec $\nu \geq \nu'$. Il existe une fonction rationnelle $R(x, z)$, attachée à H_y , ayant pour zéros les points de CH_y et pour pôles ceux de DH_y plus le point A_1 compté $\nu - \nu'$ fois. $R(x, z)$ peut être déterminée par des opérations algébriques par rapport à y , donc elle sera algébrique en y . Comme elle est unique pour y donnée, elle en sera fonction rationnelle aussi. Dénotons-la alors par $R(x, y, z)$. En tant que fonction rationnelle attachée à V_2 , elle aura comme courbe de zéros C et peut-être certaines courbes H_y , soient $H_{y_1}, H_{y_2}, \dots, H_{y_t}$. De même, outre D , elle aura comme courbes d'infini $H_{y'_1}, H_{y'_2}, \dots, H_{y'_t'}$. Je dis d'abord que $t = t'$. En effet,

$$R(x, y, z) = \frac{A(x, y, z)}{B(x, y, z)} \quad (A, B \text{ polynomes}).$$

Le faisceau linéaire découpé sur V_2 par les surfaces $A + kB = 0$ contient comme courbes totales les courbes

$$C + \sum H_{y_j}, \quad D + \sum H_{y'_j};$$

donc leurs sommes abéliennes sont les mêmes. Par suite, celles pour $(t - t')H_y$, c'est-à-dire en définitive pour

$$(t - t') (A_1 + A_2 + \dots + A_m),$$

sont égales à des périodes, ce qui entraîne bien $t = t'$ (n° 9). La fonction rationnelle

$$R(x, y, z) \cdot \frac{(y - y'_1) \dots (y - y'_t')}{(y - y_1) \dots (y - y_t)}$$

aura C comme seule courbe de zéro, et D comme seule courbe d'infini. Ces deux courbes sont donc bien contenues dans un même système linéaire.

COROLLAIRE (Severi). — *Pour que C, D soient contenues totalement dans un même système linéaire, il faut et il suffit qu'elles découpent sur une H_y générique des groupes de points appartenant à une même série linéaire.*

En effet, si C, D sont dans un même système linéaire, elles ont mêmes sommes abéliennes. Pour y fixe, ces sommes appartiennent

aussi aux deux groupes de points découpés sur H_y . D'après l'inverse du théorème d'Abel ces deux groupes de points appartiennent bien à une même série linéaire. D'un autre côté, quand cette condition est remplie les sommes abéliennes sont les mêmes; d'après ce qui précède, les deux courbes appartiennent bien alors à un même système linéaire.

22. Reprenons la courbe D du n° 18; soit $|D|$ le système *complet* (système le plus ample), d'ailleurs unique, qu'elle détermine. Quand les ξ varient, $|D|$ engendre un système $\sum, \infty^q$, de systèmes linéaires de courbes de même ordre que D : Je dis que $\sum$ est complet en tant qu'ensemble de systèmes linéaires. En effet, soient $\sum'$ un système semblable le contenant, $|D'|$ un de ses systèmes linéaires. Les sommes abéliennes de $|D'|$ ne diffèrent de celles de $|D|$ que par les valeurs des ξ . Comme il y a un système $|D|$, relatif à tout système de valeurs des ξ , il y en a un aux mêmes sommes abéliennes que $|D'|$, donc coïncidant avec lui, puisqu'ils sont tous deux complets. Par suite, $\sum$ contient bien $|D'|$ et enfin $\sum'$.

La courbe particulière D du n° 18, donc aussi $|D|$, peut être déterminée par un certain nombre de paramètres, fonctions $2q$ -uplement périodiques des q variables ξ . Il en résulte (*voir plus loin*, Chap. VI, n°s 11 et 12), que $\sum$ en tant qu'ensemble de systèmes linéaires constitue une variété algébrique. Cette variété, en fait abélienne, est en général désignée sous le nom de *variété de Picard* de la surface. On conclut de ceci que $\sum$ en tant qu'ensemble de courbes constitue aussi une variété algébrique.

Remarque. — Le système $\sum$, irréductible en tant qu'ensemble de systèmes linéaires, ne l'est pas nécessairement en tant qu'ensemble de courbes. Toutefois, entre deux composantes irréductibles, on peut toujours en intercaler plusieurs autres, telles que

chacune ait au moins une courbe en commun avec celles qui la comprennent ⁽¹⁾.

23. Un système complet $|D|$ ne découpe pas nécessairement, sur une courbe algébrique quelconque C , une série linéaire complète. On appelle *défaut* de la série, l'excès, sur sa dimension, de celle de la série complète qui la contient.

Rappelons que, par *série canonique* d'une courbe plane d'ordre m , on entend celle découpée par ses adjointes d'ordre $m-3$. Pour une courbe gauche, on la définit en s'en rapportant à une projection plane. Les courbes de V_2 , qui découpent sur toute D des groupes canoniques, appartiennent à un même système linéaire $|D'|$, dit *adjoint* à $|D|$. Pour $|H|$ cela résulte du corollaire du n° 21 et se démontrerait de même pour tout $|D|$, ∞^4 au moins, tel que $(D^2) > 0$.

Le système $|D'|$ découpe sur D une série de défaut q . La démonstration qui suit pour $|H'|$ s'étend au cas général. La série canonique complète est découpée sur H , par les surfaces

$$\sum_1^p c_h P_h(x, y, z) = 0.$$

Toutefois, si les c d'indice $\leq q$, coefficients des polynômes d'ordre total $m-2$, ne sont pas nuls, les groupes découpés ne sont pas des groupes canoniques, mais bien de tels groupes augmentés des m points à l'infini. Seuls les polynômes P_{q+h} et leurs combinaisons linéaires découpent bien les groupes canoniques. La dimension de la série incomplète correspondante est $p-1-q$, ce qui donne bien q comme défaut.

24. En résumé, nous avons trouvé pour l'irrégularité q les propriétés suivantes :

1° $R_1 = 2q$.

2° Il y a q intégrales distinctes de différentielles totales de première et $2q$ de seconde espèce.

⁽¹⁾ Voir à ce sujet un Mémoire de M. Albanese dans les *Annali di Mat.* de 1915.

3° Les systèmes complets de courbes, suffisamment généraux, sont composés d' ∞^q systèmes linéaires formant un ensemble irréductible.

4° Le défaut de la série découpée sur une courbe d'un système linéaire $|D|$, ∞^1 au moins, de degré $(D^2) > 0$, par le système adjoint est égal à q .

Plusieurs de ces énoncés peuvent être précisés davantage, mais nous ne nous y arrêterons pas ici ⁽¹⁾.

25. **Surfaces régulières.** — On appelle ainsi les surfaces pour lesquelles $q = 0$. Elles jouissent de propriétés particulièrement simples, conséquences de ce que nous venons de dire. Contentons-nous de relever celle-ci : *Sur une surface régulière, tout système complet est linéaire, donc en particulier irréductible.*

VI. — Équivalence des courbes d'après M. Severi ⁽²⁾ Identité avec leur homologie en tant que cycles.

26. On dit que deux courbes algébriques C, D sont *équivalentes* et l'on écrit $C = D$, s'il en existe une troisième E , telle que $C + E, D + E$ appartiennent à un même ensemble irréductible de systèmes linéaires. Nous entendrons par *système continu* complet $\{C\}$ l'ensemble des courbes équivalentes à C .

Remarque. — Si C, D appartiennent déjà à un ensemble irréductible de systèmes linéaires, on aura simplement $E = 0$.

Les sommes abéliennes relatives aux courbes de $\{C\}$ (il s'agit de celles pour le groupe total CH_γ) ne diffèrent que par les ξ et non par les entiers λ . Bien entendu, on se permet toujours de négliger des périodes. Il en est ainsi pour $C + E$ et $D + E$, donc aussi pour C et D .

⁽¹⁾ Pour des renseignements plus complets, notamment sur la bibliographie, voir la Note de MM. Castelnuovo et Enriques à la fin du Traité de MM. Picard et Simart.

⁽²⁾ Voir SEVERI, *Math. Ann.*, 1906, où cette notion est introduite pour la première fois sous une forme à peu près équivalente à la nôtre. Voir aussi la discussion de M. Albanese dans les *Annali di Mat.* de 1915.

27. THÉORÈME FONDAMENTAL. — *Deux courbes équivalentes sont homologues en tant que cycles, et réciproquement.*

Comme l'homologie $C \sim D$ ne dépend en rien de E , on voit que cette courbe auxiliaire disparaît finalement de la discussion.

Le théorème direct est immédiat. Les courbes d'un même système linéaire sont homologues; quand ce système varie, ses courbes restent homologues à elles-mêmes. Donc de $C = D$ on tire $C + E \sim D + E$, d'où $C \sim D$.

La réciproque est moins facile. Soit donc $C \sim D$, et donnons-nous une courbe K telle que $\{K\}$ soit composé d' ∞^g systèmes linéaires. Les courbes $C' = C + K$ et $D' = D + K$ ont elles-mêmes cette propriété puisque, par exemple, la courbe de $\{C + K\}$ composée de C et de K décrit, en même temps que cette dernière, ∞^g systèmes linéaires distincts. On le voit de suite en s'en rapportant, par exemple, aux sommes abéliennes.

Soit donc

$$C' \sim \sum \lambda_j \Delta_j + (H_a),$$

$$D' \sim \sum \lambda'_j \Delta_j + (H_a),$$

les λ, λ' étant les entiers relatifs aux sommes abéliennes de C' et D' . Comme $C' \sim D'$, les entiers $\lambda_j - \lambda'_j$ correspondent aux sommes abéliennes d'un groupe de points $t_1 A_1 + t_2 A_2 + \dots + t_m A_m$. Les sommes abéliennes d'une courbe quelconque C'' de $\{C\}$ ne diffèrent de celles de $D' + t_1 A_1 + \dots + t_m A_m$ que par les valeurs des ξ . Comme $\{C'\}$ contient ∞^g systèmes linéaires, on peut choisir C'' de telle manière que les deux systèmes de sommes abéliennes coïncident. Le raisonnement du n° 21 montre alors qu'il existe un faisceau linéaire dont une courbe totale est C'' , et une autre, D' , associée à une certaine courbe D'_1 . De

$$C'' \sim D' + D'_1, \quad C'' \sim C' \sim D',$$

on tire $D_1 \sim 0$. Donc D'_1 n'existe pas (Chap. II, n° 6, corollaire); D' appartient par suite à $[C'']$, donc enfin à $\{C'\}$. Toutes les conditions pour l'équivalence de C et D sont bien remplies et notre théorème est démontré.

28. Opérations sur les courbes. Courbes effectives ou virtuelles. — Nous savons ce que l'on entend par la *somme* de deux courbes C, D . Que doit-on entendre par leur *différence* $C - D$? S'il existe une courbe E telle que $D + E = C$, il n'y a pas à hésiter, E sera cette différence. Si E n'existe pas, nous conviendrons cependant, avec M. Severi, de considérer le symbole $(C - D)$ comme définissant une certaine courbe dite alors *virtuelle*, par opposition aux courbes ordinaires ou *effectives*. Les courbes virtuelles individualisent un système de sommes abéliennes et un cycle Γ_2 . Que $(C - D)$ soit virtuelle ou effective, $E + (C - D)$, quand elle est effective, est bien définie et coïncide avec $(E - D) + C$, comme on le voit de suite à l'aide des sommes abéliennes. Nous la désignerons par $E + C - D$, ou bien $E - D + C$, en abandonnant les parenthèses. En vertu de ceci, nous pouvons toujours attribuer un sens au symbole

$$t_1 C_1 + t_2 C_2 + \dots + t_r C_r$$

et à la relation

$$(15) \quad t_1 C_1 + t_2 C_2 + \dots + t_r C_r = 0.$$

Lorsque les C sont toutes effectives, en posant $t_i = t'_i - t''_i$, avec $t'_i, t''_i > 0$, on aura

$$t'_1 C_1 + \dots + t'_r C_r = t''_1 C_1 + \dots + t''_r C_r,$$

relation avec un sens géométrique bien précis. Quand une relation telle que (15) est satisfaite, les C sont dites *algébriquement dépendantes* ou simplement *dépendantes*.

Un corollaire immédiat du théorème fondamental est l'*équivalence entre (15) et*

$$(16) \quad t_1 C_1 + t_2 C_2 + \dots + t_r C_r \sim 0.$$

VII. — Les cycles algébriques et les nombres σ, ρ .

29. Nous étendrons à l'avenir le terme *cycle algébrique* à un Γ_2 homologué à une courbe algébrique effective ou virtuelle.

Pour que Γ_2 soit algébrique, il faut et il suffit que les périodes correspondantes des intégrales de première espèce

soient nulles. On aura alors

$$\Gamma_2 \sim C + kH \quad (C \text{ courbe effective}).$$

La condition est nécessaire, car elle est remplie pour les cycles homologues aux courbes effectives, donc aussi pour ceux homologues aux courbes virtuelles, toutes reliées aux premières par des homologies. Soit maintenant

$$\Gamma_2 \sim \sum \lambda_f \Delta_f + (H_a)$$

un cycle satisfaisant à la condition énoncée. Il existe une courbe C , coupant H_y en $p' \leq p$ points variables, dont les sommes abéliennes correspondent précisément aux entiers λ . C pourra passer t_i fois par A_i . En désignant toujours par Γ_2^i les cycles frontières des lieux des lignes A_i , au groupe total de points CH_y vont correspondre les mêmes entiers λ que pour le cycle

$$\Gamma_2 + \sum t_i \Gamma_2^i.$$

Par suite,

$$C \sim \Gamma_2 + \sum t_i \Gamma_2^i + (H_a) \sim \Gamma_2 + (H_a),$$

car $\Gamma_2^i \sim 0 \cdot (H_a)$ ici est un cycle, d'où, comme nous l'avons vu maintes fois, à cause de l'irréductibilité de H_a (voir Chap. III, n° 10),

$$(H_a) = -kH_a,$$

et finalement

$$\Gamma_2 \sim C + kH,$$

ce qui démontre notre théorème.

30. Voici une application intéressante : La courbe C obtenue au cours de la discussion définit un système $\{C\}$ qui contient ∞^q systèmes linéaires. Supposons, en particulier, que Γ_2 soit une courbe effective D . On aura

$$D \sim C + kH,$$

donc

$$D = C + kH.$$

La courbe $D + lH$ déterminera, comme C , un système continu

$\{D + lH\}$ contenant ∞^q systèmes linéaires, pourvu que $l \geq -k$. Ainsi, étant donnée une courbe algébrique effective quelconque D , le système complet $\{D + lH\}$, où l est suffisamment grand, contient ∞^q systèmes linéaires.

31. THÉORÈME. — *Les ensembles des courbes algébriques ou virtuelles et des cycles à périodes d'intégrales de première espèce nulles se correspondent élément à élément. Les zéros des deux ensembles sont des éléments correspondants.*

Ceci résulte immédiatement du théorème du n° 29.

COROLLAIRES. — I. *Le nombre de courbes algébriques, indépendantes, a un maximum $\rho \leq R_2$. L'entier ρ n'est autre que celui introduit par M. Picard dans la théorie des intégrales de différentielles totales de troisième espèce ⁽¹⁾. Son rapport avec la théorie de l'équivalence des courbes est une des plus belles découvertes de M. Severi ⁽²⁾. Enfin le théorème précédent et ceux qui y conduisent ont été démontrés pour la première fois dans mon Mémoire couronné (1^{re} Partie, Chap. II).*

II. Soit Γ_2 un diviseur tel que $\lambda\Gamma_2 \sim 0$. En vertu du théorème sur l'intégrale de Cauchy, étendu par Poincaré aux fonctions de plusieurs variables, les périodes des intégrales doubles de première espèce par rapport à $\lambda\Gamma_2$ sont nulles; donc celles par rapport à Γ_2 le sont aussi et Γ_2 est algébrique. Soit $\Gamma_2 \sim C$. On aura

$$\lambda C = 0, \quad C \neq 0.$$

La courbe C , nécessairement virtuelle, est un *diviseur de zéro* pour les courbes algébriques, par rapport à la relation d'équivalence. Réciproquement, un tel diviseur pour les courbes en constitue un aussi pour les cycles. Avec M. Severi, qui a été le premier à étudier ces diviseurs ⁽³⁾, nous en désignerons le nombre par $\sigma - 1$. On aura alors

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2.$$

⁽¹⁾ PICARD et SIMART, vol. II, Chap. X.

⁽²⁾ Mémoire déjà cité au paragraphe VI.

⁽³⁾ *Annales de l'École Normale*, 1909. Il y démontre aussi l'existence d'un système fondamental de courbes (*base minima* dans sa terminologie).

Ce que nous venons de dire mérite d'être résumé en un théorème.

THÉORÈME. — *Le nombre ρ de M. Picard est le même que celui des Γ_2 distincts à périodes d'intégrales de première espèce nulles. Les diviseurs Γ_2 sont tous algébriques, et*

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2.$$

VIII. — Application aux surfaces images des couples de points de deux courbes algébriques.

32. Soient C_1, C_2 les deux courbes; $u_1, u_2, \dots, u_{p_1}$ les intégrales de première espèce de C_1 ; $v_1, v_2, \dots, v_{p_2}$, celles de C_2 ; $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), (x, y, z)$ deux points des deux courbes et le point correspondant de la surface, que nous dénotons toujours par V_2 . Les deux premiers points satisfont respectivement aux équations

$$f_1(\xi_1, \eta_1) = 0, \quad f_2(\xi_2, \eta_2) = 0$$

des deux courbes et x, y, z sont rationnelles en $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$.

Considérons avec M. Picard une intégrale de première espèce de V_2 ,

$$(17) \quad \iint R(x, y, z) dx dy.$$

En vertu de ce que nous venons de dire, elle peut se mettre sous la forme

$$\iint S(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) d\xi_1 d\xi_2,$$

où S est encore rationnelle. Pour que cette intégrale soit de première espèce, il faut que, quand on maintient (ξ_2, η_2) fixe sur C_2 ,

$$\int S(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) d\xi_1$$

devienne une intégrale de première espèce de C_1 . On devra donc avoir

$$S(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) = \sum_{i=1}^{p_1} \Lambda_i(\xi_2, \eta_2) \frac{du_i}{d\xi_1},$$

où les A ne dépendent que de ξ_2, η_2 , et ceci rationnellement. De même

$$S = \sum_k^{p_2} B_k(\xi_1, \eta_1) \frac{dv_k}{d\xi_2},$$

où les B sont aussi rationnelles. Par suite,

$$\sum_i^{p_1} A_i(\xi_2, \eta_2) \frac{du_i}{d\xi_1} = \sum_k^{p_2} B_k(\xi_1, \eta_1) \frac{dv_k}{d\xi_2}.$$

Substituons pour ξ_1, η_1 les coordonnées de p_i points de C_1 non situés sur une même courbe canonique. On aura ainsi p_1 équations linéaires aux A , de déterminant $\neq 0$. En résolvant pour les A , on a donc, les α étant des constantes

$$A_i(\xi_2, \eta_2) = \sum_k^{p_2} \alpha_{ik} \frac{dv_k}{d\xi_2}.$$

Par suite,

$$S = \sum \alpha_{ik} \frac{du_i}{d\xi_1} \frac{dv_k}{d\xi_2}.$$

Donc enfin (17) est une combinaison linéaire des intégrales

$$(18) \quad \iint du_i dv_k.$$

D'ailleurs (18) est évidemment finie sur V_2 . De plus, puisqu'à chaque point de V_2 correspond un point et un seul de C_1 ou C_2 , les ξ, η sont rationnelles en x, y, z . Donc (18), qui peut s'écrire

$$\iint \frac{du_i}{d\xi_1} \frac{dv_k}{d\xi_2} \frac{D(\xi_1, \xi_2)}{D(x, y)} dx dy,$$

est une intégrale double de fonction rationnelle attachée à V_2 . C'est donc bien une intégrale de première espèce de la surface. Par suite, le nombre de ces intégrales est

$$p_g = p_1 p_2.$$

p_g , nombre d'intégrales doubles de première espèce, est le *genre géométrique*. De la relation

$$R_1 = 2p_1 + 2p_2 \quad (\text{Chap. III, n}^\circ 20),$$

on tire

$$q = p_1 + p_2.$$

En raisonnant comme ci-dessus, on voit que les $p_1 + p_2$ intégrales u, v donnent lieu à q intégrales simples de première espèce de V_2 . Donc toute autre en est une combinaison linéaire.

Nous avons trouvé (*loc. cit.*) $4p_1p_2 + 2$ cycles à deux dimensions pour V_2 . Les deux premiers, Γ_2^1, Γ_2^2 , sont évidemment algébriques. Soient ici encore $\gamma_\mu^1, \gamma_\nu^2, \Gamma_2^{\mu\nu}$ des rétrosections des deux courbes et le cycle à deux dimensions correspondant,

$$\Omega_1 = \|\omega_{i\mu}^1\| \quad (i = 1, 2, \dots, p_1; \mu = 1, 2, \dots, 2p_1);$$

$$\Omega_2 = \|\omega_{k\nu}^2\| \quad (k = 1, 2, \dots, p_2; \nu = 1, 2, \dots, 2p_2),$$

les matrices aux périodes des intégrales u, v , les colonnes y correspondant précisément aux rétrosections.

La période de (18), par rapport à $\Gamma_2^{\mu\nu}$, est égale à $\omega_{i\mu}^1 \omega_{k\nu}^2$. Donc, pour que

$$\sum c_{\mu\nu} \Gamma_2^{\mu\nu}$$

soit algébrique, il faut et il suffit que

$$\sum_{\mu, \nu} c_{\mu\nu} \omega_{i\mu}^1 \omega_{k\nu}^2 = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p_1; k = 1, 2, \dots, p_2),$$

ou bien, si l'on préfère, que la forme bilinéaire à coefficients entiers

$$(19) \quad \sum c_{\mu\nu} x_\mu y_\nu$$

s'annule quand on y remplace les x par les termes d'une ligne quelconque de Ω_1 et les y par ceux d'une ligne de Ω_2 .

Soit λ le nombre de formes bilinéaires (19) linéairement indépendantes correspondant aux deux matrices; c'est le nombre que M. Scorza appelle leur *caractère simultané*. On aura alors

$$\rho = \lambda + 2,$$

formule due à M. Severi. Il l'a obtenue en se basant sur la théorie de A. Hurwitz, des correspondances singulières entre les courbes. λ n'est autre, en effet, que le nombre de celles qui existent entre C_1 et C_2 .

CHAPITRE V.

VARIÉTÉS ALGÈBRIQUES A PLUS DE DEUX DIMENSIONS.

I. — Propriétés topologiques ⁽¹⁾.

1. Les généralités relatives aux surfaces s'étendent de suite à une variété algébrique à d dimensions V_d . Nous la supposons dans un espace S_{d+1} , à singularités *ordinaires*, dont il nous suffira de dire : 1° qu'elles sont les mêmes que pour la projection d'une V_d non singulière d'un S_{d+1+k} ; 2° que si V_d n'en a pas d'autres, elle est homogène.

La plupart des propriétés topologiques des V_2 s'étendent aux V_d , d'autant plus que nous avons conduit les démonstrations autant que cela était possible *en vue d'une telle extension*. Toutefois de nouvelles propriétés se présentent, et c'est sur elles que nous insisterons surtout.

2. Soit donc dans V_d un système linéaire d'*hypersurfaces* (ce sont les V_{d-1} de V_d), $|C|$, ∞^d au moins, tel que :

1° La V_{d-k} commune à k hypersurfaces C arbitraires (nous la désignerons par C^k) est elle-même irréductible, à singularités ordinaires, toute singularité nouvelle consistant, en général, en un point double, isolé, ordinaire.

2° d hypersurfaces C ont en commun un nombre de points $\neq 0$. On démontre tout à fait, comme pour les surfaces, que ce nombre de points est égal au nombre algébrique (C^d) , pourvu que V_d soit orientée convenablement. Plus généralement, le nombre de points communs aux hypersurfaces $C_1, C_2, \dots, C_d$ sera alors égal à $(C_1 C_2 \dots C_d)$.

⁽¹⁾ Voir Mémoire couronné, 1^{re} Partie, Chap. I.

3° Si r est la dimension du système linéaire découpé par les C sur une C^k générique, ce système ne contient pas $\infty^{r-1} C^{k+1}$ réducibles. Un multiple convenable des sections hyperplanes fournit un exemple d'un système tel que $|C|$.

Prenons dans $|C|$ un faisceau linéaire quelconque $\{C_u\}$, aux valeurs critiques $a_1, a_2, \dots, a_n$ (valeurs où C_u acquiert un nouveau point double), puis traçons toujours les coupures $a\infty, aa_i$.

Désignons enfin par A la C^2 , de base du faisceau. Si l'on sait réduire C_u à une cellule dont la frontière contienne A , il sera possible, par la construction même qui nous a servi dans le cas des V_2 , de réduire V_d à une cellule dont la frontière contienne C_u . La réduction de V_d se ramène ainsi à celle d'une V_{d-1} , donc finalement à celle d'une V_2 . On peut, par suite, la considérer comme établie.

3. THÉORÈMES (1). — I. *Tout Γ_k de C_u ($k < d-1$) est invariant.*

II. *Tout Γ_k de V_d ($k < d$) est homologue à un cycle de C_u .*

III. *Pour $k \leq d-2$, Γ_k et le cycle homologue de C_u forment frontière, en même temps, dans leurs variétés respectives.*

IV. *Dans les mêmes conditions ($k \leq d-2$), V_d et C_u ont mêmes indices R_k .*

La démonstration par récurrence s'impose ici. Tout d'abord celle de II, pour les Γ_1 d'une V_2 (Chap. III, n° 3), s'étend de suite à d quelconque. Elle est même encore applicable quand la surface possède des points singuliers isolés, pourvu qu'on exclue les cycles qui y passent. Remarquons que pour $d=2$, les Γ_1 sont seuls à entrer en jeu.

Par suite, nos théorèmes, en tant qu'ils s'appliquent, sont déjà démontrés pour les surfaces. Supposons-les donc vrais pour une V_{d-1} , même avec cette aggravation que II s'applique encore

(1) Ces questions ont déjà été traitées, par voie transcendante, pour les Γ_1 , par MM. Castelnuovo et Enriques dans leur Mémoire des *Annales de l'École Normale*, 3^e série, vol. XXII, 1906.

quand la variété a des points singuliers isolés. Je dis qu'ils sont encore vrais pour une V_d , II en particulier l'étant dans le cas plus général que nous venons de considérer.

Tout d'abord, pour I, c'est immédiat : Γ_k ($k < d - 1$), supposé dans C_u , y est alors réduit à A, base de $\{C_u\}$. Quand u varie, le cycle réduit reste homologue à lui-même, puisqu'il est dans une variété fixe. Γ_k , qui lui est homologue, est bien invariant.

4. Passons à II. On suppose $1 < k < d$, Γ_k ne passant pas par les points doubles isolés des C_{a_i} , ce qui est légitime puisque V_d est homogène. Le cycle à $k - 2$ dimensions, $\Gamma_k C_u$ est homologue (mod C_u) à un cycle fixe de A. Soit M_{k-1} la multiplicité de C_u dont les deux cycles forment la frontière. Son lieu quand u varie est une M_{k+1} dont la frontière comprend, outre $-\Gamma_k$ et une multiplicité de C_u , d'autres telles que celle-ci : u étant quelconque sur $a_i a$, soit Γ_{k-1}^i le cycle de C_u , différence entre les positions de M_{k-1} , suivant que u tend vers sa position d'un côté ou de l'autre de la coupure. Quand u décrit $a_i a$, Γ_{k-1}^i engendre une multiplicité M_k^i . C'est celle que nous avons en vue.

On peut traiter M_k^i , comme plus haut Γ_k , en réduisant d'abord Γ_{k-1}^i à A. En effet, comme $k - 1 < d - 1$, on peut appliquer II à ce cycle de C_u . Le cycle, réduit à A, est fixe et devient une multiplicité de dimension moindre, comme Γ_{k-1}^i lui-même, lorsque u vient en a_i . Donc sa dimension est constamment plus petite que $k - 1$. Ceci montre que $\Gamma_{k-1}^i \sim 0 \pmod{C_u}$. La M_k , dont Γ_{k-1}^i est la frontière, se réduit à une dimension moindre pour $u = a_i$; son lieu M_{k+1}^i , quand u décrit $a_i a$, aura donc pour frontière M_k^i , ainsi qu'une multiplicité de C_a .

On conclut de ceci que $M_{k+1} = \sum M_{k+1}^i$ aura pour frontières uniques $-\Gamma_k$ et une M_k de C_a : Γ_k est homologue à cette M_k , ce qui démontre II. On voit que cette réduction à C_a n'est pas affectée par la présence de points singuliers isolés extérieurs au cycle. Ceci justifie l'hypothèse faite au début de la discussion,

5. Quant à III, clairement si Γ_k' cycle réduit à $C_a \sim 0 \pmod{C_a}$, $\Gamma_k \sim 0 \pmod{V_d}$. Réciproquement de $\Gamma_k \sim 0 \pmod{V_d}$, on tire $\Gamma_k' \sim 0 \pmod{V_d}$. Soit $M_{k+1} \equiv \Gamma_k'$. On peut répéter pour M_{k+1} le

raisonnement que nous venons de faire pour les cycles. Comme $k+1 \leq d-1$, on trouvera cette fois qu'elle peut être remplacée par une multiplicité de même frontière, située en entier dans C_a . Par suite $\Gamma'_k \sim 0 \pmod{C_a}$. Ceci démontre III.

Le théorème IV est un corollaire immédiat de III.

6. Cycles évanouissants. — Pour simplifier nous allons nous limiter à une V_3 . Prenons dans $|C|$ un faisceau $\{C_u\}$, puis appliquons à la surface C_u les notations du Chapitre II. Toutefois, comme faisceau particulier, nous en prendrons un, $\{C_{uv}\}$, découpé par un faisceau quelconque, $\{C_v\}$, de $|C|$, et, au lieu de a, a_j , nous aurons certaines valeurs, $b, b_j(u)$, de v .

Pour tout Γ_2 de C_u , on aura donc

$$\Gamma_2 \sim \sum \lambda_j \Delta_j + (C_{ub}).$$

Soit a_i une valeur critique de u pour laquelle $b_1 = b_2$. Supposons les lacets bb_1 et bb_2 consécutifs, ce qui a pour seul effet de changer peut-être les λ . On pourra écrire

$$\Gamma_2 \sim \lambda_1 \Delta_1 + \lambda_2 \Delta_2 + M_2,$$

M_2 étant invariant quand u tourne autour de a_i . Dans les mêmes conditions, au contraire, $\Delta_1, \Delta_2, \Gamma_2$ seront ramenées à de nouvelles multiplicités $\Delta'_1, \Delta'_2, \Gamma'_2$, et l'on aura

$$\Gamma'_2 - \Gamma_2 \sim \lambda_1 (\Delta'_1 - \Delta_1) + \lambda_2 (\Delta'_2 - \Delta_2).$$

Faisons tendre b vers b_2 . Le second membre devient alors un cycle $\sim \Gamma'_2 - \Gamma_2$, lieu de δ_1 quand v décrit une certaine ligne $b_1 b_2$. Pour que ce lieu soit fermé, il faut que δ_1 soit évanouissant en b_2 . Donc δ_1 est un multiple de δ_2 . Cela veut dire que les deux points de branchement de C_{uv} qui coïncident en b_1 en font autant en b_2 ⁽¹⁾. Puisque δ_1 et δ_2 sont des circuits entourant ces deux points dans la même surface de Riemann, il faut $\delta_1 \sim \pm \delta_2$. Nous allons voir que le signe doit être $+$. En tout cas il ne dépend ni

(1) On le voit aussi directement en remarquant que pour u voisin de a_i et v de $b_1(a_i) = b_2(a_i)$ il n'y a que deux points de branchement de C_{uv} voisins l'un de l'autre.

de a_i , ni de $|C|$, ni de V_3 , car certainement la situation topologique ne change pas quand on modifie ces divers éléments.

A Δ'_2 correspond un lacet de b à b_1 , lacet réductible au lacet bb_1 primitif, en vertu de l'invariance de δ_1 en b_2 . On aura ainsi réduit Δ_2 à Δ_1 . De même on pourra réduire Δ'_1 à Δ_2 . Par suite,

$$\Gamma'_2 - \Gamma_2 \sim (\lambda_2 - \lambda_1)(\Delta_2 - \Delta_1) \doteq (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot \delta_2^i.$$

Je dis que δ_2^i est un cycle, nécessairement alors évanouissant en a_i . Si Γ_2 n'est pas invariant, $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$, la multiplicité à droite est un cycle, et δ_2^i en est un aussi. Ceci entraîne

$$\delta_2 - \delta_1 \sim 0 \pmod{C_{ub}},$$

indiquant alors que $+$ était bien le signe à prendre ci-dessus. Réciproquement, si $\delta_2 \sim +\delta_1$, il y a un certain cycle

$$\Delta_2 - \Delta_1 + (C_{ub}).$$

Comme il n'est pas invariant près de a_i , δ_2^i est un cycle. D'après ce que nous avons dit plus haut, nous pourrions remplacer V_3 et $|C|$ par un S_3 et ses surfaces d'ordre $m > 1$. Il s'agit d'établir que leurs Γ_2 ne sont pas tous invariants. Or, on peut montrer, indépendamment de notre discussion, que le nombre de Γ_2 invariants de C_u est égal à l'indice R_4 de sa V_3 . Pour S_3 , $R_4 = 1$, alors que pour ses surfaces d'ordre $m > 1$, $R_2 > 1$. Donc elles possèdent des cycles non invariants, *et notre affirmation est ainsi démontrée.*

Revenant à la variation de Γ_2 , puisque $(\delta_1, \delta_2) = 0$, la formule pour l'intersection des Γ_2 d'une V_2 (Chap. III, formule 11) donne

$$(\Gamma_2 \delta_2^i) = \lambda_1 - \lambda_2,$$

d'où finalement

$$\Gamma'_2 - \Gamma_2 \sim -(\Gamma_2 \delta_2^i) \cdot \delta_2^i.$$

Ceci exprime l'extension du théorème de M. Picard sur la variation des cycles. Signalons toutefois cette différence : Ici $(\delta_2^i \delta_2^i) = 2$, donc δ_2^i n'est pas invariant, mais au contraire changé en $-\delta_2^i$ quand u tourne autour de a_i .

7. On peut maintenant étendre à V_3 , puis de proche en proche à une V_d quelconque, les résultats relatifs à V_2 . Nous allons passer

en revue les divers théorèmes, en indiquant les modifications qui se présentent.

THÉORÈMES SUR LES Γ_{d-1} DE C_u . — I. *A tout point critique a_i correspond un cycle à $d-1$ dimensions, δ_i , de C_u , invariant en ce point, tel en outre que quand u tourne autour de lui, tout autre Γ_{d-1} s'accroisse de $(-1)^d \cdot (\Gamma_{d-1} \delta_i) \cdot \delta_i$.*

II. *δ_i est invariant en a_i pour d pair, au contraire changée en $-\delta_i$ pour d impair.*

III. *Toute somme de δ_i , invariante, forme frontière sur C_u .*

IV. *Tout Γ_{d-1} de C_u dépend des δ_i et des cycles invariants.*

V. *Si Γ_{d-1} forme frontière sur V_d il est homologue à une somme de δ_i .*

Ceci se démontre à peu près comme la réduction indiquée plus bas (théorème VI) pour les Γ_d .

8. THÉORÈME SUR LES Γ_d DE V_d . — VI. *Soit Δ_i l'onglet, lieu de δ_i quand u décrit $a_i a$. Tout*

$$(1) \quad \Gamma_d \sim \sum \lambda_i \Delta_i + M_d,$$

où M_d est dans C_a . De plus les δ_i y étant aussi pour l'instant, on a la congruence et l'homologie

$$(2) \quad -M_d \equiv \sum \lambda_i \delta_i;$$

$$(3) \quad \sum \lambda_i \delta_i \sim 0 \quad (\text{mod } C_a).$$

Pour le montrer appliquons la réduction du n° 4. Avec les mêmes notations, on ne pourra cette fois se débarrasser des M_d^i . Toutefois, pour que la frontière de M_{d+1} soit fermée, Γ_{d-1}^i devra se réduire à une dimension moindre dans C_{a_i} . Donc Γ_{d-1}^i est un multiple de δ_i et M_d^i un multiple de Δ_i , d'où (1) s'ensuit. Quant à (2) et à (3) ce sont des conséquences immédiates de (1).

Réciproquement, à toute homologie (3) correspond un cycle (1).

Quand les λ sont nuls, Γ_d est en entier dans C_a . La multiplicité M_d coupe A suivant un Γ_{d-2} , car ses frontières, sommées de δ_i , ne rencontrent pas A . Nous nommerons Γ_{d-2} le *cycle de A correspondant à Γ_d* . On a d'ailleurs

$$\Gamma_{d-2} \sim \Gamma_d C_u \pmod{C_u}.$$

En appliquant de façon répétée le théorème II, n° 3, on peut réduire tout Γ_k de V_d ($k < d$) à une C^{d-k} . Soit alors un système de C^{d-k} passant toutes par une C^{d-k+1} donnée. Les éléments de ce système peuvent être représentés par les points d'un S_k . Soit V_{k-1} la variété algébrique de cet espace, image des C^{d-k} possédant des singularités nouvelles. Réduisons S_k à une cellule dont la frontière contienne V_{k-1} , puis C^{d-k} à une cellule dont la frontière contienne la C^{d-k+1} fixe de son système. Il en résultera une réduction de V_d à une cellule quelque peu plus générale que celle du n° 2. Il suffit de raisonner avec C^{d-k} et cette cellule comme auparavant avec celle rattachée au faisceau $\{C_u\}$ et V_2 , pour démontrer :

VII. *Les Γ_k de C^{d-k} dépendent des cycles invariants et des cycles évanouissants le long de V_{k-1} .*

VIII. *Tout Γ_k invariant de C^{d-k} engendre un Γ_{2d-k} de V_d , et il y a équivalence entre les homologies*

$$\Gamma_k \sim 0 \pmod{C^{d-k}}; \quad \Gamma_{2d-k} \sim 0 \pmod{V_d}.$$

IX. *Il existe un système fondamental pour les Γ_2 quel que soit k .*

9. THÉORÈMES SUR LES INDICES R_k . — De VIII on tire :

X. *Relation de Poincaré :*

$$R_k = R_{2d-k}.$$

Soit r_k l'indice à k dimensions de C^{d-k} . On a

XI.

$$R_d - R_{d-2} = n - 2(r_{d-1} - R_{d-1}) - (r_{d-2} - R_{d-2}).$$

Pour le démontrer on remarque d'abord que l'indice de connexion

à d dimensions de C_u est égal à celui à $d - 2$ dimensions, c'est-à-dire à R_{d-2} (n° 3, théorème IV). Donc il y a $R_d - R_{d-2}$ cycles Γ_d distincts, aux λ non nuls. D'un autre côté, (3) est équivalente au système diophantin

$$\sum_i \lambda_i (\delta_k \delta_i) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

exprimant que le premier membre de l'homologie est invariant. Le rang de la matrice aux coefficients est égal au nombre

$$r_{d-1} - R_{d-1}$$

de Γ_{d-1} non invariants, distincts, de C_u . Donc il y a $n - (r_{d-1} - R_{d-1})$ systèmes de nombres λ distincts. Il s'agit de savoir combien correspondent à des cycles nuls. Soient D_j des M_{d-1} de C_u , analogues aux Δ pour V_d , relatives à un faisceau de C^2 dont A fait partie, A y jouant le rôle de C_a pour $\{C_u\}$. Soit M'_{d+1} le lieu de D_j quand u varie. La frontière de $\sum \alpha_j M'_{d+1}$ est un Γ_d nul, aux λ non nuls, pourvu que $\sum \alpha_j D_j$ ne soit pas une M_{d-1} invariante.

On montre, par une discussion simple, qu'il y a à exclure de ce chef $r_{d-1} - R_{d-1} + r_{d-2} - R_{d-2}$ cycles à λ non nuls, de sorte qu'il en reste $n - 2(r_{d-1} - R_{d-1}) - (r_{d-2} - R_{d-2})$. La comparaison avec le nombre déjà obtenu nous donne de suite XI.

XII. *Formule de M. Alexander.* — I_d étant l'invariant de Zeuthen-Segre de V_d ,

$$R_d = I_d + 2(-1)^d (d-1) + 2 \sum_{i=1}^d (-1)^{d-1-i} R_i.$$

Soit I_k l'invariant de Zeuthen-Segre de C^{d-k} . Les I seront définis par des relations récurrentes dont la dernière est

$$I_d = n - 2I_{d-1} - I_{d-2},$$

et les autres sont pareilles. On a de suite

$$(R_d - I_d) + 2(r_{d-1} - I_{d-1}) + (r_{d-2} - I_{d-2}) = 2(R_{d-1} + R_{d-2}).$$

Il suffit de multiplier la relation semblable pour k par

$$(-1)^{k-1} (k+1),$$

puis de sommer par rapport à k , afin d'arriver au résultat voulu. De là on déduit ensuite :

XIII. *Formule d'Euler-Poincaré :*

$$(-1)^d I_d + 2d = \sum (-1)^i R_i = \sum (-1)^i \alpha_i.$$

10. *Intersections des cycles.* — XIV. *Pour l'intersection des deux cycles*

$$\Gamma_d \sim \sum \lambda_i \Delta_i + M_d, \quad (M_d A) = \Gamma_{d-2};$$

$$\Gamma'_d \sim \sum \lambda'_i \Delta_i + M'_d, \quad (M'_d A) = \Gamma'_{d-2};$$

on a, en posant

$$(\delta_i \delta_k) = \alpha_{ik},$$

$$(\Gamma_d \Gamma'_d) = - \sum \lambda_i \lambda'_i - \sum_{i>k} \alpha_{ik} \lambda_i \lambda'_k + (\Gamma_{d-2} \Gamma'_{d-2}),$$

ou encore, avec des notations analogues à celles du Chapitre III, n° 17,

$$(\bar{\Gamma}_d \Gamma'_d) = - \sum \lambda_i \bar{\lambda}_i + (\bar{\Gamma}_{d-2} \Gamma_{d-2}).$$

XV. Si $(\Gamma_k \Gamma_{2d-k})$ est nul quel que soit Γ_{2d-k} , Γ_k est nul ou diviseur de V_d .

Grâce aux théorèmes des n°s 3, 4, 5, il suffit de prendre $k = d$. Supposons le théorème vrai pour les V_{d-1} et étendons-le à V_d .

On aura d'abord, Γ_{d-2} étant le cycle de A correspondant à Γ_d et Γ'_d quelconque dans C_u ,

$$(\Gamma_d \Gamma'_d) = (\Gamma_{d-2} \Gamma'_d) = 0.$$

Donc Γ_{d-2} est un diviseur de C_u . On peut remplacer Γ_d par $t\Gamma_d$, t étant un entier quelconque. En particulier, supposons-le choisi tel que $t\Gamma_{d-2} \sim 0 \pmod{C_u}$. Cela revient à supposer que déjà $\Gamma_{d-2} \sim 0 \pmod{C_u}$. Soit M_{d+1} le lieu de la variété dont il forme frontière, quand u varie. On aura

$$M_{d+1} \equiv \sum \lambda'_i \Delta_i + M_d^0 \sim 0, \quad (M_d^0 A) = \Gamma_{d-2},$$

et au cycle

$$\Gamma_d - \sum \lambda'_i \Delta_i - M_d^0 \sim \Gamma_d$$

correspond un Γ_{d-2} nul de A. Supposons finalement cette condition déjà remplie par Γ_d , $\bar{\Gamma}_d$ étant quelconque,

$$(4) \quad -(\Gamma_d \bar{\Gamma}_d) = \sum \lambda_i \bar{\lambda}_i = 0,$$

le terme $(\Gamma_{d-2} \bar{\Gamma}_{d-2})$ étant maintenant absent à droite. À partir d'ici la démonstration s'achève comme pour $d = 2$ (Chap. III, n° 18).

Remarque. — Le théorème du Chapitre III, n° 19, ne s'étend qu'aux cycles à 1, 2, $2d - 2$, $2d - 1$ dimensions, les démonstrations se réduisant de suite à celles pour $d = 2$; aussi ne nous y arrêtons-nous pas.

11. Torsion. — XVI. *Le groupe de torsion à $2d - 1$ dimensions se réduit à l'identité; ceux à k et $2d - k - 1$ dimensions sont isomorphes. En particulier,*

$$\sigma_{2d-1} = 1, \quad \sigma_k = \sigma_{2d-1-k}.$$

Le traitement des diviseurs Γ_{2d-1} est le même que pour $d = 2$. Pour les autres, la démonstration se fait encore par récurrence.

Prenons d'abord $k = d$. Soit pour commencer Γ_{d-2}^0 un cycle de A, diviseur de C_u . Je dis qu'il existe un diviseur Γ_d correspondant de V_d . Soit t l'entier tel que

$$t\Gamma_{d-2}^0 \sim 0 \pmod{C_u}.$$

Le raisonnement du numéro précédent nous fournira un cycle

$$\Gamma'_d \sim \sum \lambda'_i \Delta'_i + M'_d \sim 0, \quad (M'_d A) = t\Gamma_{d-2}^0.$$

Donnons-nous-en un autre quelconque

$$\bar{\Gamma}_d = \sum \bar{\lambda}_i \bar{\Delta}_i + \bar{M}_d, \quad (\bar{M}_d A) = \bar{\Gamma}_{d-2}$$

Puisque Γ'_d forme frontière

$$(\Gamma'_d \bar{\Gamma}_d) = - \sum \lambda_i \bar{\lambda}_i + (\Gamma_{d-2}^0 \bar{\Gamma}_{d-2}) = 0.$$

Par suite, *quel que soit* $\bar{\Gamma}_d$,

$$\sum \lambda_i \bar{\lambda}_i \equiv 0 \pmod{t}.$$

Raisonnant alors comme au Chapitre III, n° 19, on en déduit que les λ sont tous divisibles par t , de sorte que l'on peut écrire

$$\Gamma'_d \sim t \sum \lambda_i \Delta_i + M'_d \sim 0.$$

On en conclut, d'après VI,

$$t \sum \lambda_i \delta_i \sim 0 \pmod{C_a}.$$

Le cycle à gauche est invariant, donc la somme l'est aussi. Par suite, d'après III, elle forme frontière sur C_a . Soit

$$-M''_d \equiv \sum \lambda_i \delta_i.$$

Comme

$$-M'_d \equiv t \sum \lambda_i \delta_i,$$

$M'_d - tM''_d$ est un cycle de C_a . Soit Γ''_{d-2} la trace de M''_d sur A . $t\Gamma''_{d-2}$, trace du cycle en question, est invariant; donc Γ''_{d-2} l'est aussi. Par suite, il existe un cycle Γ''_d de C_a dont Γ''_{d-2} est la trace sur A . En définitive, $M'_d - t(M''_d - \Gamma''_d)$ coupe A suivant un

$$\Gamma_{d-2} \sim 0 \pmod{A},$$

donc

$$M'_d - t(M''_d - \Gamma''_d) \sim 0 \pmod{C_a \text{ ou bien } V_d},$$

et finalement

$$\Gamma_d \sim t \left(\sum \lambda_i \Delta_i + M''_d - \Gamma''_d \right) \sim 0.$$

La variété entre parenthèses constitue bien un diviseur du type annoncé, correspondant à Γ''_{d-2} .

12. Soit maintenant Γ_d un diviseur quelconque de V_d . Le

cycle Γ_{d-2} correspondant de A est un diviseur quelconque de C_u . Soit Γ_d^0 le diviseur correspondant obtenu à la manière ci-dessus. A $\Gamma_d - \Gamma_d^0 = \Gamma_d'$ correspond un cycle nul de A . Or la démonstration de notre théorème pour $d=2$, appliquée ici, fournit ce résultat :

Le sous-groupe des diviseurs Γ_d correspondant à des Γ_{d-2} nuls de A est isomorphe à celui des diviseurs Γ_{d-1} qui, réduits à C_u , n'en sont pas des diviseurs.

Soit donc $\Gamma_{d-2}^1, \Gamma_{d-2}^2, \dots, \Gamma_{d-2}^{n'}$ un système fondamental de diviseurs de C_u . D'après XVI appliquée à C_u (ceci est licite, puisque nous raisonnons par récurrence), il y en correspond un $\Gamma_{d-1}^1, \Gamma_{d-1}^2, \dots, \Gamma_{d-1}^{n'}$, pour ses diviseurs Γ_{d-1} . A Γ_{d-2}^i faisons correspondre un diviseur bien défini, Γ_d^i , de V_d . Soient enfin $\Gamma_d^{n'+1}, \Gamma_d^{n'+2}, \dots, \Gamma_d^n$ et $\Gamma_{d-1}^{n'+1}, \Gamma_{d-1}^{n'+2}, \dots, \Gamma_{d-1}^n$, les systèmes fondamentaux pour les diviseurs de l'énoncé ci-dessus, t_i le plus petit entier positif tel que

$$t_i \Gamma_{d-1}^i \sim 0, \quad t_i \Gamma_d^i \sim 0 \quad (\text{mod } V_d).$$

Les deux expressions

$$\sum_1^n t_i \Gamma_{d-1}^i, \quad \sum_1^n t_i \Gamma_d^i \quad (\theta_i = 1, 2, \dots, t_i)$$

représentent une fois et une fois seulement les diviseurs correspondants. Ceci démontre XVI pour $k=d$ ou $d-1$.

13. Prenons maintenant $k=d-2$. Il s'agit de comparer les diviseurs $\Gamma_{d-2}, \Gamma_{d-1}$. Pour commencer, tout diviseur Γ_{d+1} a, pour trace sur C_u , un diviseur Γ_{d-1} de C_u , diviseur d'ailleurs invariant. Mais tout diviseur Γ_{d-1} de C_u est invariant, car les nombres

$$(\Gamma_{d-1} \hat{c}_i)$$

sont nuls pour lui. Donc à tout diviseur Γ_{d-1} de C_u en correspond un Γ_{d+1} de V_d . Par suite, les groupes des diviseurs Γ_{d+1} de V_d et Γ_{d-1} de C_u sont isomorphes. D'un autre côté, V_d et C_u ont mêmes diviseurs Γ_{d-2} . Le théorème à démontrer se ramène donc au même pour C_u , vrai par hypothèse.

Puisque les diviseurs Γ_{d-1-h} de C_u sont certainement invariants, cette démonstration s'étend de suite à $k < d - 2$. Le théorème est donc complètement démontré.

II. — Les hypersurfaces contenues dans les variétés algébriques.

14. Pour simplifier nous nous limiterons aux V_3 , quoique la discussion s'étende de suite aux V_d quelconques.

Soit donc une V_3 d'équation

$$f(x, y, z, t) = 0.$$

Au lieu de $|C|$ nous considérerons le système des sections hyperplanes $|H|$, avec $\{H_z\}$ à la place de $\{C_u\}$. Enfin la courbe d'intersection de H_y avec H_z sera désignée par H_{yz} .

Parmi les intégrales de première espèce de H_{yz} , il y en aura $p - q$ distinctes :

$$u_{q+h} = \int \frac{P_h(x, y, z, t)}{f_t} dx \quad (h = 1, 2, \dots, p - q),$$

où P_h est un polynome adjoint d'ordre $m - 3$ en x, y, t , et en fait en z aussi, mais peu importe. Bien entendu $2q = R_1$, indice linéaire commun à V_3 et à H , et p est le genre des sections planes.

15. Soient $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{2p-2q}$ un système de cycles linéaires évanouissants, indépendants, de H_{yz} ; $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2q}$ un système de cycles invariants, indépendants. Les γ et les δ forment ensemble $2p$ cycles indépendants de la courbe. Les périodes des intégrales u_{q+h} par rapport aux γ sont nulles.

Adjoignons à nos intégrales, q autres, $u_1, u_2, \dots, u_q$, de manière à en avoir p linéairement indépendantes, et soit

$$\Omega = \|\omega_{i\mu}\| \quad (i = 1, 2, \dots, p; \mu = 1, 2, \dots, 2p)$$

la matrice aux périodes. Les colonnes se rapportent dans l'ordre aux cycles $\gamma_1, \dots, \gamma_{2q}, \delta_1, \dots, \delta_{2p-2q}$, de sorte que

$$\omega_{h\mu} = 0 \quad (h = q + 1, \dots, p; \mu = 1, 2, \dots, 2q).$$

On peut choisir $u_1, u_2, \dots, u_q$, de manière que Ω ait la forme

$$\begin{vmatrix} \Omega_1 & 0 \\ 0 & \Omega_2 \end{vmatrix},$$

où Ω_1 est une matrice à périodes de genre q , Ω_2 la matrice de genre $p - q$ aux périodes des u_{q+h} , les zéros représentant des matrices à termes tous nuls. Le choix de $u_1, u_2, \dots, u_q$ ne peut se faire que d'une seule manière, en ce sens que tout autre système d'intégrales satisfaisant à la condition voulue est composé d'intégrales combinaisons linéaires des précédentes.

Or, comme il est connu, Ω est de rang p , donc Ω_1 est de rang q . Par suite il y aura q cycles invariants, soient $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_q$, par rapport auxquels le déterminant des périodes de $u_1, u_2, \dots, u_q$, n'est pas nul. Une quelconque de ces intégrales peut donc être définie ainsi : Quand on y fait $y = y_0$, c'est-à-dire quand on la suppose attachée à la courbe fixe H_{y_0z} , elle doit se réduire à une intégrale à périodes données, d'ailleurs arbitraires, par rapport à $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_q$, et à périodes nulles par rapport aux δ . En se rapportant au traitement des intégrales simples des surfaces, on voit qu'on a ainsi défini q intégrales de différentielles totales de première espèce pour H_z .

Supposons en particulier que H_{yz} devienne la courbe à l'infini, soit A , de H_z . On aura déterminé, sur toute H_z , une intégrale de différentielles totales de première espèce, à périodes données par rapport aux γ . Le raisonnement du Chapitre IV, n° 19, s'applique maintenant *verbatim*. Il n'y a qu'à prendre pour origine d'intégration un point quelconque à l'infini de H_{yz} et l'on montrera ici encore que $u_1, u_2, \dots, u_q$ ne sont autres que les valeurs prises par certaines intégrales de différentielles totales de première espèce de V_3 quand on maintient y et z fixes. Rappelons que par définition ces intégrales sont du type

$$\int R dx + S dy + T dz,$$

où R, S, T sont des fonctions rationnelles, telles que sous le signe d'intégration on ait une différentielle totale. Ainsi (Castelnuovo-Enriques), V_3 possède q intégrales de différentielles totales de première espèce.

Les intégrales $u_1, u_2, \dots, u_q$ adjointes aux u_{q+h} fournissent p intégrales distinctes de première espèce de H_{yz} .

16. Soit maintenant D une surface algébrique quelconque. On aura pour les sommes abéliennes sur H_{yz} prises à partir d'un des points à l'infini de la courbe jusqu'aux points variables d'intersection avec D ,

$$\begin{aligned} v_h(y, z) &= \xi_h \quad (h = 1, 2, \dots, q), \\ v_{q+h}(y, z) &= \sum \frac{\lambda_k}{2\pi i} \int_a^{\sigma_k(z)} \frac{\Omega_{hk}(Y, z)}{Y - y} dz, \end{aligned}$$

les notations étant les mêmes qu'au Chapitre IV. Les ξ , uniformes, partout finies, sont ici aussi des constantes.

Les λ correspondent à un certain cycle *invariant*, algébrique de H_z ,

$$\Gamma_2 \sim \sum \lambda_k \Delta_k + (H_{az}).$$

Ces conditions *nécessaires* pour qu'aux v corresponde une surface algébrique D sont aussi *suffisantes*, c'est-à-dire *si* Γ_2 *est invariant, algébrique* ⁽¹⁾, *il lui correspond une surface algébrique* D *coupant* H_{yz} *en des points variables aux sommes abéliennes* v .

En effet, Γ_2 détermine sur chaque H_z un système $\{d\}$ de courbes, dont l'une d_0 bien déterminée coupe H_{yz} en un nombre de points variables $\leq p$, aux sommes abéliennes v . d_0 est complètement définie par son comportement aux points à l'infini de H_{yz} et par le groupe de ses points à l'infini, puisque de ces derniers on déduit de suite les ξ . Ainsi $\{d\}$ étant connu, d_0 y est déterminée par des conditions rationnelles par rapport à z . D'ailleurs $\{d\}$ lui-même est défini rationnellement par rapport à z , car l'ordre (d^2) de ses courbes est égal à (Γ^2) , donc bien déterminé. Or les courbes d'un ordre donné d'un S_3 se partagent en un nombre fini de familles algébriques (Noëther, Halphen) ⁽²⁾. Si l'on exprime que les courbes

⁽¹⁾ Il faut en outre que Γ_2 soit homologue à une courbe effective. Dans le cas contraire on remplacera Γ_2 par $\Gamma_2 + kHH_z$ auquel correspondra une surface effective D lorsque k est suffisamment élevé. A Γ_2 correspond alors la surface virtuelle $D - kH$.

⁽²⁾ Par toute d il passe, outre H_z une surface d'ordre μ déterminé, F_μ . On

de l'une d'elles appartiennent à une surface donnée, on impose, aux paramètres dont elles dépendent, des équations rationnelles par rapport aux coefficients de la surface, donc ici par rapport à z . Comme $\{d\}$ est unique sur H_z , les paramètres correspondants devront être des fonctions rationnelles de z et algébriques d'un certain nombre d'entre eux.

En définitive, l'ensemble des conditions imposées à d_0 est rationnel par rapport à z . d_0 est donc définie par une équation $\varphi(x, y, z, t) = 0$, où φ est un polynôme en x, y, t , à coefficients rationnels en z ; on peut le supposer polynôme en z aussi. Le lieu D , de d_0 , intersection partielle ou totale des deux variétés algébriques $f = 0$, $\varphi = 0$, est bien une surface algébrique.

17. On définira, comme pour une V_2 , les Γ_4 algébriques comme homologues à une somme ou une différence de surfaces algébriques de V_3 .

Pour que Γ_4 soit algébrique, il faut et il suffit qu'il coupe H_z suivant un Γ_2 algébrique.

La condition est évidemment nécessaire. Elle est aussi suffisante car quand elle est remplie il y a une surface algébrique D coupant H_z suivant une courbe d , et passant, soit k fois, par la courbe à l'infini. Alors $\Gamma_4 + kH$ coupe toute H_z suivant un cycle homologue à DH_z . Donc

$$\Gamma_4 + kH \sim D,$$

ce qui démontre notre affirmation.

Deux surfaces coupant H_z suivant des courbes d'un même système linéaire sont elles-mêmes contenues dans un même système linéaire (même démonstration que pour une V_2).

L'équivalence des surfaces et les nombres ρ , σ se définissent comme pour les courbes d'une V_2 .

obtient $\{d\}$ en exprimant que l'intersection de F_μ et H_z se décompose en deux courbes d'ordre donné, qui se rencontrent en un certain nombre de points, etc. Les paramètres dont $\{d\}$ dépend sont alors clairement algébriques en z , donc (voir le texte) rationnels en cette variable.

Pour que deux surfaces C, D soient équivalentes, il faut et il suffit que leurs intersections CH_z , DH_z , avec H_z , en soient des courbes équivalentes.

La condition est évidemment nécessaire; montrons qu'elle est suffisante. Soit g une courbe de H_z telle que $CH_z + g$ et $DH_z + g$ appartiennent à un même système continu de courbes à ∞^q systèmes linéaires. En vertu de l'hypothèse, g existe certainement. Alors pour k suffisamment grand $CH_z + g + (kHH_z - g)$ et $DH_z + g + (kHH_z - g)$ seront des courbes effectives ayant la même propriété; c'est-à-dire que $(C + kH)H_z$ et $(D + kH)H_z$ seront contenues totalement dans un même système continu possédant ∞^q systèmes linéaires. Chacun de ces systèmes linéaires est individualisable par une courbe unique, se comportant de manière donnée en certains points; peu importe d'ailleurs, il nous suffit de savoir qu'elle est déterminée rationnellement sur H_z . En raisonnant comme plus haut, on voit que cette courbe a pour lieu une surface algébrique coupant H_z en outre suivant la courbe à l'infini comptée un certain nombre de fois. En faisant varier les courbes, on arrive ainsi à un système continu de surfaces, coupant H_z suivant un système continu de courbes, dont une est équivalente à $(C + k'H)H_z$ et une autre à $(D + k''H)H_z$. Chacune de ces surfaces définit à son tour un système linéaire unique, dont un contient C, laissant comme résidu $k'H$, tandis qu'un autre contient D, avec un résidu $k''H$. Par suite,

$$C + k'H = D + k''H.$$

De ceci résulte

$$(CH_z) - (DH_z) \sim (k' - k'').HH_z \sim 0 \pmod{H_z}.$$

Mais HH_z ne peut être un cycle nul ou un diviseur de H_z . Par suite,

$$k' = k'', \quad C = D.$$

COROLLAIRES. — I. *Des quatre relations*

$$C = D; \quad CH_z = DH_z; \quad C \sim D \pmod{V_3}; \quad CH_z \sim DH_z \pmod{H_z}$$

une quelconque entraîne les trois autres.

En effet, elles sont toutes équivalentes à la seconde.

II. *Les diviseurs Γ_4 sont tous algébriques et leur groupe est isomorphe à celui des diviseurs pour les surfaces.* En particulier $\sigma_4 = \sigma_1 = \sigma$.

En effet, un diviseur Γ_4 coupe H_z suivant un diviseur Γ_2 , algébrique comme nous l'avons vu (Chap. IV, n° 31); donc Γ_4 l'est aussi. Soient C, D deux hypersurfaces telles que $\Gamma_4 \sim C - D$. Le plus petit entier positif t , tel que $t\Gamma_4 \sim 0$, est aussi celui tel que $t(C - D) = 0$, ce qui démontre notre affirmation.

III. *La variété et ses sections hyperplanes ont même nombre σ .*

Ceci résulte de ce qu'elles ont même nombre σ_1 , égal pour chacune à leur nombre σ .

Remarque. — Tout ce qui précède reste vrai lorsque $|H|$ est remplacé par le système $|C|$ considéré maintes fois.

18. La variété peut posséder des intégrales doubles dites « de première espèce », intégrales partout finies, de forme

$$(5) \quad \int \int R \, dy \, dz + S \, dz \, dx + T \, dx \, dy,$$

où R, S, T sont rationnelles et satisfont à la « condition d'intégrabilité »

$$\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial z} = 0.$$

L'intégrale double relative à H_z ,

$$(6) \quad \int \int T \, dx \, dy,$$

est de première espèce. Pour que Γ_4 soit algébrique, il faut que la période de toute intégrale (6) par rapport à $\Gamma_4 H_z$ soit nulle, ou bien, ce qui revient au même, que celle de toute intégrale (5) par rapport au même cycle le soit. *Cette condition nécessaire est-elle suffisante?* Nous ne pouvons l'affirmer et pour le moment la question doit rester en suspens. Tout ce que l'on peut dire c'est que le nombre ρ est au plus égal à celui des Γ_2 à périodes d'inté-

grales doubles toutes nulles. Ainsi au lieu d'une valeur précise, comme c'était le cas pour les surfaces, nous n'avons plus cette fois qu'un maximum de ρ .

Remarque. — Tout ce que nous avons dit s'étend à une V_d quelconque. Il suffira de considérer au lieu des Γ_4 les Γ_{2d-2} et au lieu de (5) les intégrales

$$\sum \iint R_{ik} dx_i dx_k$$

avec

$$R_{ik} = -R_{ki}, \quad \frac{\partial R_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial R_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial R_{li}}{\partial x_k} = 0.$$

III. — Un théorème sur les cycles algébriques des surfaces d'une V_3 . Application aux courbes des surfaces non singulières de l'espace ordinaire.

19. V_3 étant quelconque, reprenons le système $|C|$ du paragraphe I et faisons-y varier $\{C_u\}$. Soit r la dimension de $|C|$ ($r > 3$). Les surfaces C , à singularités nouvelles, y formeront un système algébrique ∞^{r-1} , $\sum$, que nous supposerons irréductible. Cette condition sera certainement remplie si $r \geq 4$. En effet, $|C|$ étant irréductible, n'est pas *composé* avec les surfaces d'un système algébrique de dimension moindre, c'est-à-dire que C générique ne se compose pas de plusieurs surfaces C' appartenant à un système de dimension ≤ 2 . Donc les C ayant un point singulier en un point de V_3 forment un système linéaire ∞^{r-1} et l'ensemble de ces systèmes linéaires est un système ∞^{r-1} composé d' ∞^3 systèmes linéaires. Ce système est représentable dans un S_r par une V_{r-4} lieu d' $\infty^r S_{r-4}$. La section de cette V_{r-4} par un S_4 de S_r est une V_3 birationnellement équivalente à celle donnée, donc irréductible. Par suite, V_{r-4} est elle-même irréductible. Comme ses points correspondent biunivoquement aux éléments de $\sum$, ceci démontre notre affirmation.

20. THÉORÈME. — Si l'un des Γ_2 évanouissants, δ_i de C_u , est algébrique, ils le sont tous.

Déplaçons $\{C_u\}$ dans $|C|$ de façon à permuter C_{a_i} avec C_{a_k} , ce qui peut se faire grâce à l'irréductibilité du système $\sum$ ci-dessus. Le cycle δ_i se permutera avec δ_k . Pour préciser, u étant voisin de a_i un certain cycle δ_i de C_u tend à devenir nul quand u tend vers a_i . Ce cycle sera alors devenu pour u voisin de a_k le cycle semblable δ_k relatif à ce point.

Remarquons que le genre géométrique p_g de C_u ne peut changer que pour un nombre fini de valeurs de u , comme il résulte de suite de ce qu'elles seront déterminées par des relations algébriques. Soit r_2 l'indice de connexion à deux dimensions d'une C générique. On peut se donner p_g intégrales doubles distinctes de première espèce attachées à C_u , à éléments différentiels rationnels par rapport à u . Leurs périodes seront des fonctions analytiques de u , méromorphes pour toute valeur non critique. Le rang de la matrice aux périodes relatives à r_2 cycles distincts est égal à $r_2 - \rho$, où ρ est le nombre de Picard de C_u . Ce rang ne peut varier que pour un ensemble dénombrable de valeurs de u , puisqu'il appartient à l'ensemble des zéros communs à plusieurs fonctions analytiques (les déterminants de la matrice) se conduisant comme les périodes. Donc le nombre ρ de C_u ne peut varier que pour un ensemble dénombrable de ces surfaces.

On en conclut que les surfaces C , à nombre ρ autre que celui de C générique, se partagent en un ensemble dénombrable de familles ∞^{r-1} au plus.

Revenons au déplacement de $\{C_u\}$ dans $|C|$ considéré plus haut. D'après ce qui précède, pendant qu'il s'accomplit, on pourra faire varier une C_u d'une position voisine de C_{a_i} à une autre voisine de C_{a_k} , sans changer ρ , donc le nombre de cycles algébriques distincts, à aucun moment du déplacement. Par suite, si δ_i est algébrique pour u voisin de a_i , δ_k l'est aussi pour u voisin de a_k .

Mais si un cycle est algébrique pour u dans une certaine région, il l'est encore pour u arbitraire, car la condition pour qu'il le soit s'exprime par l'évanouissement identique de certaines fonctions analytiques, les périodes des p_g intégrales doubles de première espèce. Donc enfin le cycle δ_k de C_{a_i} évanouissant quand u tend vers a_k le long de aa_k , est algébrique pourvu que le cycle semblable δ_i le soit. Ceci démontre notre théorème.

21. Supposons que les δ ne soient pas algébriques. Alors tout cycle algébrique est invariant, car autrement son accroissement quand u tourne autour de a_i serait un cycle $\lambda\delta_i$ nécessairement algébrique; δ_i en serait donc un aussi puisque les périodes correspondantes des intégrales de première espèce, tout comme celles relatives à $\lambda\delta_i$, devraient toutes être nulles. Dans ces conditions, les Γ_2 algébriques de C sont les traces des Γ_4 algébriques de V_3 ; par suite, les nombres ρ de V_3 et de C sont égaux. Ainsi lorsque les cycles évanouissants de C ne sont pas algébriques, ses Γ_2 algébriques sont invariants et traces des Γ_4 algébriques de V_3 .

Dans les mêmes conditions, tout système fondamental pour les courbes de C est trace d'un tel système pour les surfaces de V_3 .

Supposons au contraire les δ algébriques. Il résulte alors de l'étude de la topologie de V_3 que tous les Γ_2 de C dépendent des cycles invariants et des cycles algébriques.

22. APPLICATION A UN THÉORÈME DE NOETHER ⁽¹⁾. — Une surface générique F_m , d'ordre $m > 3$, d'un S_3 , ne possède que des courbes intersections complètes avec d'autres surfaces de l'espace.

L'espace S_3 , image des valeurs complexes de trois variables, est une V_3 dont la région à l'infini se compose d'un S_2 (plan), lui-même homéomorphe à l'image des valeurs complexes de deux variables. Tout Γ_k est déformable en une multiplicité en entier à l'infini, ou en définitive dans un S_2 quelconque de S_3 . Si sa dimension $k \leq 2$, le même raisonnement peut être continué. On en tire de suite $R_{2k+1} = 0$, $R_{2k} = 1$. Par exemple $R_1 = 0$, car tout Γ_1 , finalement réductible à un S_1 (droite), y est déformable en un point. Enfin, ceci nous intéresse surtout, tout Γ_4 étant homologue à un multiple d'un S_2 , est nécessairement algébrique. Tout cycle invariant de F_m est multiple de celui formé par une section plane H ,

⁽¹⁾ Voir NOETHER, Mémoire du prix Steiner; G. FANO, *Torino Atti*, 1908, ainsi que mon Mémoire couronné. La démonstration ci-dessus est plus simple, mais ne va pas aussi loin.

car c'est son intersection avec le Γ_4 fondamental de S_3 . Les Γ_2 invariants sont donc tous algébriques.

Le système $|F_m|$ est ∞^1 au moins, irréductible; donc on peut appliquer le théorème du n° 20. Supposons que tous ses Γ_2 évanouissants soient algébriques. Alors tous les Γ_2 le seront. Je dis que pour $m > 3$ et F_m arbitraire, cela n'a pas lieu. Il suffit pour cela de montrer qu'il y a toujours une F_m possédant des Γ_2 non algébriques.

Soient $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$ deux polynômes réels de degrés respectifs $m-2$ et m , tels que

$$\varphi(0, 0, 0) > 0, \quad \psi(0, 0, 0) > 0,$$

mais à part cela absolument quelconques. Soit en outre

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

une sphère réelle, de rayon assez petit pour que φ et ψ soient positives à son intérieur et sur elle. La surface F_m

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 - r^2)\varphi + \varepsilon\psi = 0,$$

où ε est un nombre positif très petit, comprend une ovale réelle très voisine de notre sphère et intérieure à elle. Cette ovale est un Γ_2 de la surface et je dis qu'il n'est pas algébrique. En effet,

$$(7) \quad \iint \frac{dx dy}{f'_x}$$

en est une intégrale de première espèce, car il n'y a pas ici de courbe multiple, de sorte que tout polynôme est adjoint; si son degré est $\leq m-4$, il lui correspond bien une intégrale de première espèce. L'intégrale étendue à Γ_2 diffère très peu de sa valeur étendue à la sphère, c'est-à-dire de

$$\iint \frac{dx dy}{2x\varphi(x, y, z)}$$

étendue à la sphère. En coordonnées polaires, cette intégrale devient

$$r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta_1 d\theta_1 d\theta_2}{\varphi(r \sin \theta_1 \cos \theta_2, r \sin \theta_1 \sin \theta_2, r \cos \theta_1)}$$

Comme $\sin \theta_1$ et φ sont positifs sur toute la sphère, l'intégrale est

essentiellement positive et il en est de même pour la période de (7) par rapport à Γ_2 . Ce cycle n'est donc effectivement pas algébrique.

Pour $m = 3$, il n'y a pas d'intégrales de première espèce et le procédé ne réussit plus.

On doit donc conclure que, pour $m \geq 4$, les cycles algébriques de F_m générique sont invariants, donc multiples de la trace H du Γ_1 fondamental de S_3 . Ainsi, quel que soit C , courbe de F_m , on aura $C = kH$. Or F_m est régulière, puisque son indice R_1 est nul comme celui de S_3 . Par suite, C et kH sont contenues dans un même système linéaire. Prenons pour H la courbe à l'infini. Il y aura une fonction rationnelle attachée à F_m ,

$$\frac{P(x, y, z)}{Q(x, y, z)} \quad (P, Q \text{ polynomes}),$$

s'annulant sur C et infinie sur kH , c'est-à-dire finie à distance finie. P devra donc s'annuler en tous les points de F_m où Q s'annule. D'après l'extension d'un théorème classique de Noëther ⁽¹⁾,

$$P = Q \cdot P_1 + P_2 f \quad (P_1, P_2 \text{ polynomes}).$$

Donc, sur F_m ,

$$\frac{P}{Q} = P_1.$$

Ainsi P_1 est un polynome qui a pour zéro simple sur F_m la seule courbe C . Cela revient à dire que C est l'intersection complète de F_m avec la surface $P_1(x, y, z) = 0$. Ceci achève la démonstration.

Je renvoie le lecteur à mon Mémoire couronné pour diverses extensions et applications se rattachant à ce qui précède.

(¹) Pour la démonstration, voir PICARD et SIMART, vol. II, p. 17.

CHAPITRE VI.

L'ANALYSIS SITUS ET LES FONCTIONS ABÉLIENNES (1).

I. — Théorème d'existence des fonctions abéliennes.

1. Étant donnée une matrice à p lignes et $2p$ colonnes

$$\Omega = \parallel \omega_{j\mu} \parallel \quad (j = 1, 2, \dots, p; \mu = 1, 2, \dots, 2p),$$

existe-t-il des fonctions $2p$ -uplement périodiques qui lui appartiennent, c'est-à-dire des fonctions méromorphes de p variables $u_1, u_2, \dots, u_p$, invariantes quand on ajoute simultanément aux u les éléments d'une ligne quelconque de Ω ? La réponse constitue le théorème de Weierstrass, démontré pour la première fois par MM. Poincaré et Picard :

Pour qu'il existe des fonctions de la nature voulue, il faut et il suffit : 1° qu'il y ait une forme alternée à coefficients entiers

$$(1) \quad \sum_{\nu=1}^{2p} c_{\mu\nu} x_{\mu} y_{\nu}; \quad c_{\mu\nu} = -c_{\nu\mu},$$

s'annulant quand on y remplace les x et les y par les éléments de deux lignes quelconques de Ω ; 2° que si $\xi_{\mu} + i\eta_{\mu}$ sont les périodes d'une combinaison linéaire quelconque des u ,

$$(2) \quad \sum c_{\mu\nu} \xi_{\mu} \eta_{\nu} > 0.$$

Nous allons reprendre la question au point de vue de l'Analysis

(1) Voir FROBENIUS, *Journal de Crelle*, vol. 79, 1884. — WIRTINGER, *Monatshefte für Math. und Physik*, vol. VI, 1895. — POINCARÉ, *Acta mathematica*, vol. XXVI, 1902. — LEFSCHETZ, Mémoire couronné, 2^e Partie, Chap. I.

Situs. Outre une précision majeure des résultats connus, nous en obtiendrons de nouveaux, notamment sur la distribution des fonctions périodiques et à multiplicateurs. De plus, ce nouveau traitement se recommande par son élégance et sa simplicité. Les seuls théorèmes d'*Analysis Situs* dont nous nous servirons sont assez élémentaires : théorèmes sur les intersections de cycles, sur les systèmes fondamentaux pour l'anneau et généralisation du résultat du Chapitre II, n° 6.

2. Dans l' S_{2p} réel, où l'on représente les valeurs complexes des u , les zéros d'une fonction entière ou méromorphe, $\varphi(u_1, u_2, \dots, u_p)$ ⁽¹⁾, ou, pour abréger $\varphi(u)$, ont pour image une variété analytique W_{2p-2} . Nous allons faire ces hypothèses :

a. W_{2p-2} existe et est invariante quand on ajoute des périodes quelconques aux u .

b. Elle n'est pas *cylindrique*, c'est-à-dire n'est pas le lieu d'un espace linéaire se déplaçant parallèlement à lui-même. En particulier, il n'y a pas de combinaison linéaire des u constante sur W_{2p-2} .

Dans ces circonstances, je dis que les conditions classiques d'existence sont satisfaites. Ces hypothèses, un peu plus générales que celles du n° 1, ont l'avantage de couvrir, outre les fonctions périodiques, les fonctions à multiplicateurs (fonctions thêta, fonctions intermédiaires).

3. Les points de S_p définis par

$$u_j = t_1 \omega_{j1} + t_2 \omega_{j2} + \dots + t_{2p} \omega_{j2p} \quad (0 \leq t_\mu < 1)$$

y constituent un domaine fondamental U_{2p} pour nos fonctions, au même titre que, par exemple, le parallélogramme des périodes pour les fonctions elliptiques. Je dis que U_{2p} est un parallélépipède fini. En effet, dans le cas contraire, les points donnés par les mêmes formules, mais où les t prennent toutes les valeurs entières possibles, forment un ensemble partout dense, contenu dans un certain S_k ($1 \leq k < 2p$). Soient (u) et (u') un point de W_{2p-2} et

(1) POINCARÉ, *Acta mathematica*, 1883, p. 97. — COUSIN, *Ibid.*, 1895, p. 1.

de l'ensemble. D'après a , le point $(u + u')$ appartient aussi à W_{2p-2} . Ainsi, par (u) passe un S_k contenant un ensemble partout dense qui appartient à la variété. Soient D , (v) , (v') une droite quelconque de cet S_k et deux de ses points. Quand la variable z prend toutes les valeurs réelles possibles, le point

$$\frac{v + zv'}{1 + z}$$

décrit D tout entière. En vertu de ce qui précède, tout point de S_k , donc aussi de D , est un point limite pour les zéros de φ . La fonction $\varphi\left(\frac{v + zv'}{1 + z}\right)$ est méromorphe en z ⁽¹⁾ et très petite pour z réelle et $\neq -1$. Donc elle s'annule identiquement dans ce cas. On en conclut que D appartient à W_{2p-2} , et il en est de même pour l' S_k considéré tout entier. Ainsi, par tout point de W_{2p-2} , passe un S_k qui lui appartient en entier, ce qui contredit b . Notre affirmation est donc démontrée.

Corollaire. — Désignons par $\bar{x}$ le conjugué d'un nombre x . Le déterminant d'ordre $2p$, formé avec Ω et la matrice aux éléments conjugués,

$$\begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \dots & \omega_{1,2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{\omega}_{11} & \bar{\omega}_{12} & \dots & \bar{\omega}_{1,2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0.$$

4. A U_{2p} correspond un anneau à $2p$ dimensions, où W_{2p-2} sera représentée par un Γ_{2p-2} , C. En effet, φ s'annule sur un nombre fini de multiplicités de U_{2p} , car autrement il y aurait au moins un point (u^0) , du domaine, au voisinage duquel passent une infinité de ces multiplicités; (u^0) serait alors un point singulier essentiel de φ , alors qu'on l'a supposée méromorphe à distance finie. Quand on déforme U_{2p} en un anneau, ces multiplicités se raccordent (hypothèse a , n° 2) et donnent bien lieu à un Γ_{2p-2} .

On peut étendre aux cycles C les considérations du Chapitre II, n° 6, et leur attribuer une *orientation type*, ce que nous suppose-

(1) Ceci résulte de la représentation de la fonction méromorphe $\varphi(u)$ par le quotient de deux fonctions entières (POINCARÉ, COUSIN, *loc. cit.*).

rons fait une fois pour toutes. Ces cycles et leurs intersections seront alors des multiplicités bien définies. En particulier, pour une orientation convenable de l'anneau, que nous supposerons choisie une fois pour toutes, *les nombres arithmétiques et algébriques d'intersections de p tels cycles sont égaux.*

5. Numérotions les arêtes de U_{2p} issues d'un même sommet O , et sur la $i^{\text{ième}}$ marquons, près de O , un certain point A_i . A la pyramide à faces planes $P_{2p} = OA_1A_2 \dots A_{2p}$ de l'espace des u correspond une P'_{2p} de l'anneau. Nous supposerons l'ordre des A_i tel que P'_{2p} soit une indicatrice de l'anneau. De même à $P_k = OA_{i_1}A_{i_2} \dots A_{i_k}$ correspond une P'_k dans l'anneau située dans le cycle déterminé par les arêtes correspondantes (Chap. II, n° 12) et qui, par définition, lui servira d'indicatrice. Ce Γ_k ainsi orienté sera dénoté par $(i_1, i_2, \dots, i_k)$.

Il résulte de suite des théorèmes les plus élémentaires sur les intersections des variétés que :

1° Si les nombres $i_1, i_2, \dots, i_{2p}$ sont tous distincts,

$$(i_1, i_2, \dots, i_k)(i_{k+1}, i_{k+2}, \dots, i_{2p}) = (-1)^n,$$

où n est le nombre de transpositions dans la permutation

$$\begin{pmatrix} 1, 2, \dots, 2p \\ i_1, i_2, \dots, i_{2p} \end{pmatrix}.$$

2° Si les i ne sont pas distincts,

$$(i_1, i_2, \dots, i_k)(i_{k+1}, \dots, i_{2p}) = 0,$$

car alors, en faisant subir au besoin à l' S_k de l'espace des u , image du premier cycle, une translation convenable, il ne rencontrera plus l'espace semblable relatif au second.

6. Ceci posé, pour chaque dimension, les cycles du type précédent forment un système fondamental. Il suffit d'ailleurs de prendre pour chaque combinaison d'indices un seul des cycles correspondants. Nous choisirons celui aux i rangés en ordre croissant. Alors

$$G \sim \sum m'_{i_1 i_2} (i_3, i_4, \dots, i_{2p}),$$

avec $i_1 < i_2, i_3 < i_4 < \dots < i_{2p}$, et pour chaque terme de la somme les $2p$ nombres i sont tous différents. Posons

$$[C(\mu, \nu)] = m_{\mu\nu} = -m_{\nu\mu}.$$

On trouve de suite

$$(-1)^n [C(i_1, i_2)] = (-1)^n m_{i_1 i_2} = m'_{i_1 i_2};$$

par suite,

$$C \sim \sum (-1)^n m_{i_1 i_2} (i_3, i_4, \dots, i_{2p}) \quad (i_1 < i_2; i_3 < i_4 \dots < i_{2p}).$$

L'ensemble des zéros de la fonction $\varphi(u_1 - g_1, \dots, u_p - g_p)$ aux constantes g arbitraires [fonction que nous dénoterons plus simplement par $\varphi(u - g)$] remplit encore une multiplicité analytique représentée dans l'anneau par un cycle $C' \sim C$. Je dis qu'en général l'intersection des deux cycles est un Γ_{2p-4} . En effet, autrement, les deux multiplicités $\varphi(u) = 0$, $\varphi(u - g) = 0$ ont en commun dans U_{2p} une M_{2p-2} , ceci *quelles que soient les g* . Cette multiplicité doit être une de celles en nombre fini correspondant à C . Comme elle doit varier continûment avec les g , elle est fixe. Il y a donc un point (u^0) tel que $\varphi(u^0 - g) = 0$, *quelles que soient les g* . Cela revient à dire que $\varphi(u)$ est identiquement nulle, circonstance à écarter. Notre affirmation est donc correcte et, conformément à nos conventions, nous pouvons parler du cycle CC' , que nous écrirons C^2 pour une raison évidente.

On démontre de même l'existence des cycles $C^3, C^4, \dots, C^{p-1}$, de dimensions $2p - 6, \dots, 2$. Quant à C^p , ce sera le groupe de points communs à p cycles C . Leur nombre sera désigné par (C^p) . Il n'est autre d'ailleurs que celui des zéros communs à p fonctions $\varphi(u - g)$ situés dans U_{2p} . On montre, tout comme nous l'avons fait pour C , que

$$C^k \sim k! \sum (-1)^n m_{i_1 i_2} m_{i_3 i_4} \dots m_{i_{2k-1} i_{2k}} (i_{2k+1}, i_{2k+2}, \dots, i_{2p}),$$

$$i_1 < i_2; \quad i_3 < i_4; \quad i_{2k-1} < i_{2k}; \quad i_{2k+1} < i_{2k+2} < \dots < i_{2p}.$$

Nous retiendrons plus particulièrement

$$C^{p-1} \sim (p-1)! \sum (-1)^n m_{i_1 i_2} m_{i_3 i_4} \dots m_{i_{2p-3} i_{2p-2}} (i_{2p-1}, i_{2p}),$$

$$(C^p) = p! \omega,$$

où ϖ est le *déterminant pfaffien* ou simplement *pfaffien* de la forme alternée à coefficients entiers

$$F = \sum_{\mu, \nu}^{2p} m_{\mu\nu} x_{\mu} y_{\nu}.$$

Ce pfaffien, rappelons-le, est au signe près la racine carrée du déterminant de la forme.

La formule donnant (C^p) généralise un résultat classique de Poincaré, relatif aux zéros communs à p fonctions thêta.

Soit $M_{\mu\nu}$ le coefficient de $m_{\mu\nu}$ dans le développement du déterminant de F . La forme alternée à coefficients entiers

$$\Phi = \sum M_{\mu\nu} x_{\mu} y_{\nu}$$

est l'*inverse* de F . Des théorèmes les plus simples sur les pfaffiens ⁽¹⁾ on déduit de suite que

$$C^{p-1} \sim \frac{(p-1)!}{2\varpi} \sum M_{\mu\nu}(\mu, \nu).$$

7. Ceci posé, considérons l'intégrale

$$\int \int du_j du_k = \int \int \frac{\partial u_j}{\partial \varphi} d\varphi du_k.$$

On peut supposer qu'en tout point $\varphi = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial u_j}$ n'est pas nécessairement nulle, car alors les zéros de φ seraient tous multiples et on la remplacerait par $\frac{\varphi}{\frac{\partial \varphi}{\partial u_j}}$. Par une discussion très simple, analogue

à celle du Chapitre IV, n° 17, on montre alors que, comme $\varphi = 0$ en tout point de C^{p-1} ,

$$\int \int_{C^{p-1}} du_j du_k = 0.$$

En vertu du théorème de Cauchy-Poincaré, que nous avons déjà cité une fois, C^{p-1} peut être remplacé par son expression en fonc-

(1) Voir KOVALEWSKI, *Einführung in die Determinantentheorie*, p. 149.

tion des cycles fondamentaux. Par suite,

$$(3) \quad \sum M_{\mu\nu} \omega_{j\mu} \omega_{k\nu} = 0 \quad (j, k = 1, 2, \dots, p).$$

Soient ensuite $v = v' + i v''$ une combinaison linéaire quelconque des $u, \xi_\mu + i \eta_\mu$ sa $\mu^{\text{ième}}$ période, $x = x' + i x''$ une variable telle qu'en un point arbitraire de C^{p-1} v en soit fonction holomorphe. x pourrait être, par exemple, une des u . Soit enfin E_2 une petite cellule positive de C^{p-1} . Le signe de l'intégrale

$$\int \int_{E_2} dv' dv'' = \int \int_{E_2} \left[\left(\frac{\partial v'}{\partial x'} \right)^2 + \left(\frac{\partial v''}{\partial x''} \right)^2 \right] dx' dx''$$

ne dépend pas de la position de E_2 sur C^{p-1} (Riemann), et même, vu nos conventions sur les orientations, il ne dépend ni de φ , ni même de Ω . On en conclut, en vertu du théorème de Stokes généralisé,

$$(4) \quad \int \int_{C^{p-1}} dv' dv'' = \sum M_{\mu\nu} \xi_\mu \eta_\nu > 0,$$

car la somme a le signe $+$, quand φ est une fonction thêta relative à une matrice aux périodes convenable.

La relation (3) et l'inégalité (4) satisfaites par Φ démontrent le théorème de Weierstrass.

Définitions. — Nous dirons avec M. Scorza d'une forme telle que Φ qu'elle est *principale* pour sa matrice, d'une matrice telle que Ω , qui possède une telle forme, qu'elle est *de Riemann*.

8. L'inégalité (4) a été réduite par M. Scorza à une autre notablement plus suggestive. Posons

$$v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_p u_p.$$

En vertu des identités

$$2\xi_\mu = \sum (\lambda_j \omega_{j\mu} + \bar{\lambda}_j \bar{\omega}_{j\mu}); \quad 2i\eta_\mu = \sum (\lambda_j \omega_{j\mu} - \bar{\lambda}_j \bar{\omega}_{j\mu}),$$

l'inégalité se réduit à

$$(5) \quad \sum_{j,k}^p A_{jk} \lambda_j \bar{\lambda}_k > 0; \quad A_{jk} = \bar{A}_{kj} = \frac{-1}{4i} \sum M_{\mu\nu} \omega_{j\mu} \bar{\omega}_{k\nu}.$$

Elle exprime qu'une certaine *forme hermitienne* (forme à indéterminées conjuguées), attachée à la forme principale Φ , est *définie*, positive.

Considérons maintenant la matrice carrée d'ordre $2p$,

$$B = \| b_{rs} \|, \quad b_{rs} = \omega_{sr}, \quad b_{r,p+s} = \overline{\omega_{sr}} \quad (s \leq p).$$

En vertu des relations

$$\sum_{\mu, \nu} M_{\mu\nu} \omega_{j\mu} \omega_{k\nu} = \sum_{\mu, \nu} M_{\mu\nu} \overline{\omega_{j\mu}} \overline{\omega_{k\nu}} = 0 \quad (j, k = 1, 2, \dots, 2p)$$

et en désignant par A la matrice aux coefficients de la forme hermitienne, on a de suite la relation entre matrices,

$$\overline{B} \| M_{\mu\nu} \| B = \begin{Bmatrix} O, & A \\ \overline{A}, & O \end{Bmatrix},$$

où, rappelons-le, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont les transposées de A et B .

Or, puisque (5) est définie, A est de rang p et la matrice au second membre de rang $2p$. Donc, des déterminants des matrices à droite, aucun n'est nul. Quant au déterminant de B , cela constitue une nouvelle démonstration du corollaire du n° 3. Mais nous trouvons en outre que le déterminant

$$| M_{\mu\nu} | \neq 0,$$

ce qui montre que la forme Φ , et pareillement *une forme principale quelconque*, ne peut être dégénérée.

II. — Propriétés générales des fonctions périodiques et à multiplicateurs.

9. Dans la première partie de l'exposé suivant, nous nous bornerons à des indications sommaires sur les démonstrations, car elles sont aujourd'hui bien connues des géomètres (1).

I. *Toute matrice de Riemann possède des fonctions à multiplicateurs.* — D'une façon précise, soit Φ une forme principale. Il existe une fonction entière $\varphi(u)$, à variété de zéros du type du

(1) Voir par exemple KRAZER, *Lehrbuch der Thetafunktionen*, Chap. IV.

paragraphe I, telle que

$$(6) \quad \varphi(u + \omega_\mu) = e^{2\pi i \left(\sum_j \alpha_{j\mu} u_j + \beta_\mu \right)} \varphi(u),$$

avec

$$(7) \quad \sum_j (\alpha_{j\mu} \omega_{j\nu} - \alpha_{j\nu} \omega_{j\mu}) = m_{\mu\nu} = -m_{\nu\mu},$$

lès α, β étant des constantes et les m des entiers. Une fois l'existence de φ admise, on établit (7) en comparant les deux valeurs de $\varphi(u + \omega_\mu + \omega_\nu)$ suivant qu'on ajoute les ω_μ, ω_ν dans un ordre ou dans l'autre.

Pour montrer l'existence de φ , on choisit un nouveau système de périodes fondamentales (ce qui revient à appliquer aux variables de Φ une transformation unimodulaire) tel qu'au lieu de Φ on ait une forme canonique

$$\sum_1^p e_\mu (x_\mu y_{p+\mu} - x_{p+\mu} y_\mu).$$

Un changement linéaire et homogène de variables ramènera finalement Ω à la forme classique

$$\left\| 0, \dots, 0, \frac{1}{e_\mu}, 0, \dots, 0, a_{\mu 1}, \dots, a_{\mu p} \right\|; \quad a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu} \quad (\mu = 1, 2, \dots, p).$$

Les fonctions que l'on recherche ne sont autres alors que les thêtas généralisées, appartenant à la matrice précédente, et dont l'existence est bien connue ⁽¹⁾. En retournant aux variables u , on aura alors une fonction $\varphi(u)$ de la nature voulue.

Les fonctions entières telles que φ sont dites *intermédiaires*.

10. *Les entiers m relatifs à φ sont les mêmes que ceux déjà rencontrés au paragraphe I.* En effet, soit E_2 une petite cellule de U_{2p} passant par un point de C , variété des zéros de φ , telle que $(E_2 C) = +1$. (Le double emploi de la notation C pour la variété et son image dans l'anneau ne causera aucune confusion.)

(1) KRAZER, *loc. cit.*

ζ étant le contour frontière de E_2 ,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta} d \log \varphi = \pm 1,$$

le signe dépendant uniquement de l'orientation de U_{2p} . Prenons maintenant dans U_{2p} une M_2 quelconque, coupant C aux points $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, et soit γ sa frontière. Soit E_h^2 une petite cellule positive de M_2 contenant α_h en son intérieur, et de frontière ζ_h . On aura

$$\int_{\zeta_h} = \pm \int_{\gamma},$$

le signe étant le même que celui de $(E_h^2 C)$, c'est-à-dire $+$ si α_h compte pour $+1$ dans $(M_2 C)$, $-$ dans le cas contraire. On en tire

$$\frac{\sum \int_{\zeta_h}}{\int_{\gamma}} = \frac{\int_{\gamma}}{\int_{\gamma}} = (M_2 C).$$

Prenons en particulier pour M_2 le parallélogramme de U_{2p} relatif au cycle $(\mu\nu)$. Un calcul des plus simples donne de suite, pour le rapport des intégrales, la valeur $m_{\mu\nu}$, d'où $m_{\mu\nu} = [C(\mu, \nu)]$, ce qui démontre notre affirmation.

La forme alternée F , aux coefficients m , est dite *forme fondamentale* de la fonction φ .

11. II. *La fonction $\varphi(u)$ appartient à un système linéaire complet $(^1)$, ∞^{p-1} , de fonctions se conduisant de même par rapport à Ω . ω est toujours le pfaffien de F . Le système linéaire lui-même fait partie d'un système continu ∞^p .*

Ces deux propriétés appartiennent aux fonctions θ dont φ provient. La dimension du système linéaire a bien la valeur en question pour ces fonctions, et, comme les transformations unimodulaires ne changent pas le pfaffien, l'énoncé s'ensuit.

III. *$p+1$ fonctions arbitraires périodiques $f_1(u), f_2(u), \dots$,*

(¹) C'est-à-dire contenu dans nul autre semblable, de dimension plus grande.

$f_{p+1}(u)$ satisfont à une relation algébrique. Toute autre est une fonction rationnelle de celles-ci.

Considérons les équations

$$(8) \quad x_1 = f_1(u), \quad x_2 = f_2(u), \quad \dots, \quad x_{p+1} = f_{p+1}(u).$$

A tout système de valeurs des x correspond un nombre fini de points (u^i) de U_{2p} , car les fonctions $f_h(u) - x_h$ sont arbitraires et les cycles, analogues à C , qui leur correspondent, ne se couperont qu'en un nombre fini de points (n° 6). Les fonctions symétriques élémentaires des expressions $f_{p+1}(u^i)$ sont des fonctions uniformes de $x_1, x_2, \dots, x_p$ sans singularités essentielles, donc rationnelles. Par suite, $f_{p+1}(u)$ est bien une fonction algébrique des autres f .

Il résulte de ce qui précède que les équations (8) sont les équations paramétriques d'une variété algébrique V_p . Toute fonction périodique est une fonction uniforme du point sur V_p et n'y a, au pis aller, que des pôles. C'est donc une fonction rationnelle des x , c'est-à-dire, en définitive, des f .

12. Variété abélienne attachée à Ω ('). — On peut trouver un système de fonctions périodiques $f_1(u), f_2(u), \dots, f_n(u)$ telles que les équations

$$x_h = f_h(u)$$

représentent une variété algébrique V_p , située dans un S_n , privée de singularités, homéomorphe à l'anneau. C'est la *variété abélienne* attachée à Ω . Elle n'est d'ailleurs définie qu'à une transformation birationnelle près.

Montrons que V_p existe effectivement. Cela sera certainement le cas si, pour un choix convenable des f , on ne peut trouver deux points distincts $(a), (b)$ de U tels que

$$f_h(a) = f_h(b) \quad (h = 1, 2, \dots, n).$$

Cela revient à établir que l'on ne peut avoir $f(a) = f(b)$, quelle que soit la fonction périodique f . Or, (v) étant quelconque,

(') Les théorèmes qui suivent ont été traités dans mon Mémoire déjà cité. Les démonstrations en ont été, toutefois, quelque peu simplifiées.

$f(u + v)$ est une fonction périodique des u appartenant à Ω . Si la circonstance en question se présente, $f(a + v) = f(b + v)$, quel que soit (v) , donc $f(u + a - b) = f(u)$, quel que soit (u) . Ceci signifie que $(a - b)$ est un système de périodes simultanées et (a) , (b) coïncident.

13. Les fonctions φ d'un même système continu découpent un système complet d'hypersurfaces algébriques de V_p .

Soit C_0 l'hypersurface découpée par φ . Les dérivées secondes de $\log \varphi$ sont périodiques, donc rationnelles sur V_p ; par suite, son hypersurface d'infini C_0 est bien algébrique.

Soit $[C]$ le système complet déterminé par C_0 . Il existe une fonction rationnelle $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nulle sur C , infinie sur C_0 , mais nulle part ailleurs sur V_p . La fonction

$$\psi(u) = \varphi(u) \cdot R[f_1(u), f_2(u), \dots, f_n(u)]$$

est uniforme, finie à distance finie, donc entière. Le deuxième facteur à droite est une fonction périodique, donc ψ , qui découpe C , se conduit comme φ par rapport aux périodes. Par suite, elle appartient au même système linéaire (n° 11, théorème II). Ainsi les fonctions φ d'un même système linéaire découpent un système linéaire complet d'hypersurfaces.

En faisant varier les φ dans leur système continu, $[C]$ parcourt un système continu $\sum$ contenant ∞^p systèmes linéaires. Mais $R_1 = 2q = 2p$, donc p est l'irrégularité de V_p ; par suite $\sum$, en tant qu'ensemble de systèmes linéaires, a la dimension maximum. Il coïncide donc avec le système continu complet $\{C\}$, ce qui démontre le théorème.

14. Exprimées en termes des u , les intégrales simples ou doubles de première espèce dépendent toutes respectivement de celles telles que

$$\int du_h, \quad \int \int du_h du_k,$$

résultat d'ailleurs vrai pour les intégrales de toutes les multiplicités. Il nous suffira pour la suite de montrer que ces intégrales

doubles sont bien de première espèce. Dans la relation

$$\int \int du_k du_k = \sum \int \int \frac{dx_r dx_s}{\frac{D(x_r, x_s)}{D(u_h, u_k)}},$$

les dénominateurs à droite sont des fonctions périodiques, donc rationnelles sur V_p , et nous avons bien là une intégrale de fonctions rationnelles. D'un autre côté, l'intégrale aux u est de différentielles totales, finie, donc sa transformée, l'intégrale aux x , l'est aussi, car ces deux propriétés se préservent dans un changement de variables. Ceci démontre notre affirmation.

III. — Le nombre ρ pour les variétés abéliennes.

15. Voici comment on arrive de suite à une limite supérieure de ρ . ρ hypersurfaces algébriques distinctes découperont, sur une V_2 convenable de V_p , autant de courbes algébriquement distinctes. Les périodes des intégrales doubles

$$\int \int du_j du_k$$

par rapport à ces courbes, considérées comme cycles Γ_2 , seront nulles. Il y aura ainsi ρ cycles distincts, à périodes d'intégrales de première espèce toutes nulles. Soit

$$\sum c_{\mu\nu}(\mu, \nu)$$

l'un de ces cycles. La période correspondante sera

$$\sum_{\mu < \nu} c_{\mu\nu}(\omega_{j\mu} \omega_{k\nu} - \omega_{k\mu} \omega_{j\nu}) = 0.$$

Cela veut dire que la forme alternée à coefficients entiers

$$(9) \quad \sum c_{\mu\nu} x_\mu y_\nu \quad (c_{\mu\nu} = -c_{\nu\mu})$$

s'annule quand on y remplace les x et les y par les éléments de deux lignes quelconques de Ω . En fait, (1) est une forme principale, mais peu importe.

Ω possédera en général un certain nombre, $1 + k$, de formes telles que (9), $k \geq 0$. Le nombre k est dit *indice de singularité* de la matrice (Humbert, Scorza). *D'après ce qui précède*, $\rho \leq 1 + k$.

16. Soit Φ_1 une forme principale à coefficients premiers entre eux. Il existe alors un système fondamental de formes alternées dont Φ_1 fait partie ⁽¹⁾. Soient $\Phi_2, \dots, \Phi_{k+1}$ ses autres formes. La forme hermitienne, relative à $x\Phi_1 + y\Phi_j$, est à coefficients polynomes en x, y . Pour qu'elle soit définie positive, donc pour que $x\Phi_1 + y\Phi_j$ soit principale, il faudra et suffira que certaines inégalités de type

$$f(x, y) > 0 \quad (f, \text{polynome homogène})$$

soient satisfaites. Or $f(1, 0) > 0$, puisque Φ_1 est principale. Donc si f est de degré h , il contient un terme en Ax^h avec $A > 0$. Par suite, $f(x, 1) > 0$ pour x positif, suffisamment grand. On en conclut que $x\Phi_1 + \Phi_j$ est principale pour x suffisamment grand.

Alors, si Φ_j ne l'est pas, on pourra la remplacer, dans le système fondamental, par la forme que nous venons d'écrire. Nous pourrions donc supposer, comme nous le ferons, que les formes Φ_j sont toutes principales.

Le système linéaire des formes principales étant ∞^k , celui des formes fondamentales, leurs inverses, aura la même dimension. D'un autre côté, si F, F' sont fondamentales, relatives à des fonctions intermédiaires φ, φ' , la forme $\lambda F + \lambda' F'$ (λ, λ' entiers positifs), est fondamentale pour la fonction $\varphi^\lambda \varphi'^{\lambda'}$. Donc le système des formes fondamentales est linéaire, ∞^k , comme celui des formes alternées de Ω .

17. Soit donc $F_1, F_2, \dots, F_{k+1}$ un système fondamental pour les F . Une modification minime du raisonnement du début du numéro précédent permet de montrer que l'on peut les supposer toutes non dégénérées. Soient φ_i la fonction intermédiaire relative à F_i , C_i l'hypersurface qu'elle découpe sur V_P . Je dis que

⁽¹⁾ Cela résulte de suite d'un théorème de Fröbenius. Voir E. CAHEN, *Théorie des nombres*, t. I, p. 168.

$C_1, C_2, \dots, C_{k+1}$ sont algébriquement distinctes. En effet, de

$$t_1 C + t_2 C_2 + \dots + t_{k+1} C_{k+1} = 0,$$

on tirerait

$$\Gamma_{2p-2} = t_1 C_1 + \dots + t_{k+1} C_{k+1} \sim 0 \pmod{V_p}.$$

En se reportant au n° 40, on vérifie que les nombres $(\Gamma_{2p-2}(\mu, \nu))$ sont précisément les coefficients de la forme alternée

$$t_1 F_1 + \dots + t_{k+1} F_{k+1}.$$

Puisque $\Gamma_{2p-2} \sim 0$, ces nombres sont tous nuls, d'où

$$t_1 F_1 + t_2 F_2 + \dots + t_{k+1} F_{k+1} \equiv 0,$$

et par suite $t_1 = t_2 = \dots = t_{k+1} = 0$, puisque les F sont linéairement indépendantes.

On conclut de ceci $\rho \geq 1 + k$ et, comme $\rho \leq 1 + k$, on a enfin

$$\rho = 1 + k,$$

c'est-à-dire :

THÉORÈME FONDAMENTAL. — *Le nombre ρ d'une variété abélienne est égal à l'indice de singularité de sa matrice de Riemann augmenté d'une unité ⁽¹⁾.*

18. Soit C une hypersurface quelconque de V_p . On aura

$$\lambda C = \sum \lambda_i C_i.$$

Posons $\lambda_i = \lambda''_i - \lambda'_i$ (λ'_i, λ''_i positifs), puis

$$D' = \lambda C + \sum \lambda'_i C_i, \quad D'' = \sum \lambda''_i C_i.$$

D'' est découpée par la fonction intermédiaire

$$\prod_i \varphi''_i.$$

Je dis que l'on peut toujours supposer cette fonction *non dégé-*

(¹) Le cas de $p = 2$ a déjà été traité, de manière d'ailleurs entièrement différente, par MM. Bagnera et de Franchis (*Rendic. del Circolo di Palermo*, vol. XXX, 1910).

née (non réductible à une fonction intermédiaire de moins de p variables). En effet, on peut évidemment remplacer D' , D'' par $D' + xC_1$, $D'' + xC_1$ et, en raisonnant à peu près comme au n° 16, on montre que, pour x suffisamment grand, la fonction intermédiaire correspondante n'est pas dégénérée.

Ceci posé, puisque $D' = D''$, D' peut être découpée par une fonction ψ du même système que celle ci-dessus. Or la fonction

$$\chi(u) = \left[\frac{\psi(u)}{\prod_i \varphi_i^{\lambda_i}} \right]^{\frac{1}{\lambda}},$$

qui découpe C sur V_p , se conduit comme une fonction intermédiaire par rapport à Ω ; elle est finie à distance finie; donc, pour établir qu'elle est *intermédiaire*, il suffit de démontrer qu'elle est uniforme. Comme elle ne s'annule que sur C , il n'y a de question que pour le voisinage de cette hypersurface. Soit (u^0) un point quelconque de C . D'après le théorème des fonctions implicites

$$[\chi(u)]^\lambda = f(u) f_1(u),$$

où f_1 est holomorphe près de (u^0) et ne s'y annule pas. Quant à f , c'est un polynôme en une des différences $u_i - u_i^0$, par exemple $u_1 - u_1^0$, à coefficients fonctions holomorphes en $u_2, u_3, \dots, u_p$, au même voisinage et s'annulant en (u^0) , sauf le premier, qui est égal à l'unité. Mais puisque le second membre découpe C compté λ fois, les racines de ce polynôme ont toutes la multiplicité λ , d'où

$$f = [F(u)]^\lambda,$$

où F est de même type que f . On en conclut de suite que $\chi(u)$ est holomorphe au point (u^0) . C'est donc bien une fonction intermédiaire. Ainsi : *Toute hypersurface algébrique de V_p peut être découpée par une fonction intermédiaire.*

Pour $p = 2$, ce théorème a été obtenu par M. Humbert, s'appuyant sur un résultat préliminaire de M. Appell.

17. Soit F la forme fondamentale relative à $\chi(u)$. On aura

$$F = \sum t_i F_i.$$

Par suite, en vertu d'une remarque faite plus haut, le cycle

$$C - \sum t_i C_i$$

coupe les cycles (μ, ν) en un nombre nul de points. C'est donc un cycle nul ou un diviseur de V_p . Mais les nombres σ de V_p , comme ceux de l'anneau, sont égaux à l'unité. Donc le cycle est nul. De

$$C \sim \sum t_i C_i$$

on tire de suite

$$C = \sum t_i C_i.$$

Les hypersurfaces $C_1, C_2, \dots, C_{r+1}$ forment donc un système fondamental.



NOTE I.

INTÉGRALES DOUBLES DE SECONDE ESPÈCE ET INTÉGRALES SIMPLES DE TROISIÈME ESPÈCE DES SURFACES ALGÈBRIQUES ⁽¹⁾.

Les intégrales doubles de seconde espèce, introduites dans la Science et étudiées de façon fort complète par M. Picard, se rattachent de multiple manière aux théories traitées dans cet Ouvrage. Elles vont nous donner l'occasion de faire de nouvelles applications de l'*Analysis Situs*. En particulier, nous allons mettre en relief un beau théorème reliant la théorie de ces intégrales aux propriétés de certains cycles (n° 45). J'ajoute que le théorème et sa démonstration sont susceptibles d'être étendus aux intégrales de multiplicité quelconque d'une V_d .

Une fois la théorie des intégrales doubles bien assise, le théorème fondamental de M. Picard sur le nombre ρ s'obtient si simplement que nous n'avons pu résister à la tentation de le présenter ici.

I. — Certaines propriétés des cycles à deux dimensions.

1. THÉORÈME. — *Deux cycles Γ_2, Γ'_2 de V_2 peuvent être remplacés par d'autres homologues à nombres arithmétique et algébrique d'intersections égaux au signe près.*

Nous supposons que les cycles se coupent en des points ordinaires, sans y être tangents, condition que l'on pourra toujours remplir en déformant légèrement au besoin l'un d'eux.

Je dis d'abord que l'on peut s'arranger pour que l'ensemble des points ordinaires de Γ_2 soit connexe ⁽²⁾. Car autrement, cet ensemble se partage en un nombre fini de régions, dont soient Q_1 et Q_2 deux quelconques. Dans Q_1 prenons une indicatrice ζ_1 formant la frontière d'une cellule E_2^i , puis joignons Q_1 à Q_2 par un petit tube T se raccordant à Γ_2 suivant les ζ .

⁽¹⁾ Voir PICARD et SIMART, vol. II, Chap. VII et suivants; LEFSCHETZ, *Annals of Mathematics*, vol. XXI, 1920; *Comptes rendus*, 1923, ainsi qu'un Mémoire en cours de publication au *Journal de Mathématiques*.

⁽²⁾ Un point d'une M_2 est ordinaire lorsque deux E_2 le contenant en ont toujours en commun une troisième le contenant également.

On aura

$$E_2^1 \equiv \zeta_1, \quad E_2^2 \equiv \zeta_2, \quad T \equiv \zeta_1 + \zeta_2.$$

Par conséquent,

$$\Gamma_2 + T - E_2^1 - E_2^2 \equiv 0.$$

La multiplicité à droite est un cycle $\sim \Gamma_2$, car elle lui est réductible par déformation continue. Si l'on prend T suffisamment délié et que l'on évite de lui faire traverser nos cycles, le nouveau cycle coupera toujours Γ_2' de manière convenable et il contient une région Q de moins. En poursuivant on en réduira le nombre à une seule, c'est-à-dire que l'ensemble des points ordinaires sera alors connexe.

* Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ les points de l'intersection de Γ_2, Γ_2' contribuant $+1$ à $(\Gamma_2 \Gamma_2')$, $B_1, B_2, \dots, B_n$, les autres, de sorte que

$$(\Gamma_2 \Gamma_2') = n - n'.$$

On suppose $n \leq n'$, condition en rien restrictive comme on le verra.

On peut joindre A_i à B_i par une ligne composée en entier de points ordinaires. Déformons Γ_2' de manière à faire glisser A_i le long de la ligne jusqu'à le faire venir en B_i . Nous supposons qu'en même temps une petite E_2 contenant A_i sur Γ_2' est ramenée au voisinage de B_i sur le même cycle. Puisque les contributions de A_i et de B_i au nombre $(\Gamma_2 \Gamma_2')$ sont de signes contraires, l' E_2 sera superposée à une cellule orientée négativement pour Γ_2' , de sorte qu'elle pourra être supprimée dans Γ_2' . Il en résultera que A_i et B_i seront supprimés en tant qu'intersections des deux cycles. En continuant, on réduira bien le nombre arithmétique d'intersections à

$$n' - n = -(\Gamma_2 \Gamma_2'). \quad \text{C. Q. F. D.}$$

COROLLAIRE. — *Lorsque $(\Gamma_2 \Gamma_2') = 0$, on peut réduire les cycles à d'autres ne se coupant plus nulle part.*

2. Soient $\Gamma_2^1, \Gamma_2^2, \dots, \Gamma_2^{\rho_0}$ des cycles distincts en nombre maximum coupant toute courbe algébrique C de V_2 en un nombre algébrique nul de points. Complétons le système par $R_2 - \rho_0$ autres cycles, $\Gamma_2^{\rho_0+1}, \dots, \Gamma_2^{R_2}$, de façon à en avoir R_2 de distincts. Toute combinaison des $\Gamma_2^{\rho_0+i}$ coupera au moins une C en un nombre algébrique de points $\neq 0$.

1° On peut trouver $R_2 - \rho_0$ courbes $C_1, C_2, \dots, C_{R_2-\rho_0}$ telles que le déterminant d'ordre $R_2 - \rho_0$,

$$(1) \quad |(\Gamma_2^{\rho_0+h} C_i)| \neq 0,$$

car autrement il y aurait des entiers λ non tous nuls tels que

$$\sum \lambda_h (\Gamma_2^{\rho_0+h} C) = 0 = \left[\left(\sum \lambda_h \Gamma_2^{\rho_0+h} \right) C \right],$$

pour toute C , contrairement à la manière de choisir nos cycles.

2° C étant toujours quelconque, il y a des entiers λ, λ_i , avec $\lambda \neq 0$, tels que

$$\sum_i \lambda_i (\Gamma_2^{\rho_0+h} C_i) + \lambda (\Gamma_2^{\rho_0+h} C) = 0.$$

On en conclut que $C + \sum \lambda_i C_i$ coupe tout Γ_2 en un nombre algébrique nul de points, d'où (Chap. V, n° 18)

$$t \lambda C + t \sum \lambda_i C_i \sim 0 \quad (t \neq 0),$$

et enfin (Chap. IV, n° 28)

$$(2) \quad t \lambda C + t \sum \lambda_i C_i = 0.$$

3° D'un autre côté, si l'on avait

$$(3) \quad \sum \lambda_i C_i = 0,$$

on en tirerait

$$\sum \lambda_i C_i \sim 0,$$

auquel cas, pour tout Γ_2

$$\sum \lambda_i (\Gamma_2 C_i) = 0,$$

et par conséquent le déterminant (1) est nul. Comme ceci n'a pas lieu, la relation (3) ne peut exister elle non plus, de sorte que les C_i sont indépendantes au sens de M. Severi. La relation (2) montre que toute autre courbe dépend d'elles, donc le nombre des C_i est égal à ρ (Chap. IV, n° 31). On en conclut :

THÉORÈME. — *Il y a exactement $R_2 - \rho$ cycles Γ_2 distincts rencontrant toute courbe algébrique de V_2 en un nombre algébriquement nul de points.*

Remarque. — M. Severi a démontré que le déterminant

$$|(C_i C_k)| \neq 0.$$

D'un autre côté (Chap. IV, n° 28), les C_i sont des Γ_2 indépendants. Par conséquent on peut prendre, au lieu des $\Gamma_2^{\rho_0+h}$, ces courbes mêmes. On aura alors le système de cycles

$$\Gamma_2^1, \Gamma_2^2, \dots, \Gamma_2^{\rho_0}, C_1, \dots, C_\rho,$$

aux mêmes propriétés que celui considéré plus haut.

3. Une autre question fort importante pour la suite est celle *du nombre de cycles finis à systèmes de λ distincts, du type*

$$(4) \quad \sum \lambda_i \Delta_i + ((H_a)).$$

[La notation $((H_a))$ désigne, comme au Chapitre IV, n° 9, une partie finie de H_a .]

A (4) correspond l'équivalence

$$-((H_a)) \equiv \sum \lambda_i \delta_i \quad (\text{les } \delta \text{ sont dans } H_a),$$

ou plus généralement, le sens de $((H_y))$ étant clair,

$$(5) \quad -((H_y)) \equiv \sum \lambda_i \delta_i \quad (\text{les } \delta \text{ sont dans } H_y)^*.$$

Réciproquement, en raisonnant comme au Chapitre III, n° 10, on montre qu'à (5) correspond toujours un Γ_2 fini (4). On est donc ramené à déterminer le nombre d'équivalences (5) distinctes.

Reprenons les lignes l_i du Chapitre II, n° 20, joignant l'un des points bases de $\{H_y\}$ (ici les points à l'infini) aux $m-1$ autres. Pour qu'un Γ_1 de H_y forme la frontière d'une région finie de la courbe, il faut et il suffit d'abord qu'il soit ~ 0 , puis que

$$(\Gamma_1 l_h) = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, m-1).$$

En effet, ces relations expriment simplement que des deux régions en lesquelles Γ_1 partage H_y , chacune des l passe un nombre pair de fois de l'une dans l'autre. Les points à l'infini sont alors nécessairement dans la même région.

On conclut de ce qui précède que, pour que (5) soit satisfaite, il faut et il suffit que :

$$(a) \quad \sum \lambda_i (\delta_i \Gamma_1) = 0 \quad (\text{pour tout } \Gamma_1 \text{ de } H_y),$$

$$(b) \quad \sum \lambda_i (\delta_i l_h) = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, m-1).$$

D'après la fin du Chapitre II, les équations linéaires aux λ , auxquelles on est ainsi conduit, ont une matrice aux coefficients de rang

$$2p - 2q + m - 1 = 2p - R_1 + m - 1.$$

Le nombre de solutions distinctes est donc

$$N - (2p - R_1 + m - 1) = R_2 - 1 + 2p - R_1$$

(Chap. III, n° 11). Tel est aussi le nombre d'équivalences (5) distinctes, et

par suite enfin le nombre cherché des cycles finis (4) à systèmes de λ distincts.

4. D'un autre côté, soit Γ_2 quelconque. $\Gamma_2 \sim m\Gamma_2 - (\Gamma_2 H)$. H coupe H en un nombre algébriquement nul de points, donc il est homologue à un cycle fini (n° 1, corollaire). On obtiendra ainsi de suite $R_2 - 1$ cycles finis distincts. Comme $(H^2) = m \neq 0$, H ne peut être homologue à un cycle fini. Par suite, $R_2 - 1$ est le nombre maximum de Γ_2 finis distincts. On en conclut que les cycles finis (4) en comprennent au moins $2p - R_1$ à systèmes de λ distincts, formant cependant frontière sur V_2 . Il n'est pas difficile de montrer que $2p - R_1$ est précisément le nombre de ces cycles. Soit en effet

$$M_3 \equiv \sum \lambda_i \Delta_i + ((H_a)).$$

M_3 coupe une H_y générique suivant un Γ_1 , car H_y n'en rencontre ni les frontières Δ_i ni $((H_a))$, les premières, puisque y n'est pas en général sur les coupures aa_i , la seconde parce que $((H_a))$ ne contient pas les points-bases de $\{H_y\}$.

M_3 , lieu de Γ_1 , a pour frontières (Chap. III, n° 11)

$$(6) \quad \sum (\Gamma_1 \partial_i) \cdot \Delta_i + ((H_a)).$$

Par suite, $\lambda_i = (\Gamma_1 \partial_i)$. On en conclut que le nombre de Γ_2 considérés ne dépasse pas le nombre de systèmes d'entiers $(\Gamma_1 \partial_i)$ distincts, quand on envisage tous les Γ_1 de H_y , c'est-à-dire $2p - 2q = 2p - R_1$ (Chap. II, n° 18). Ceci suffit pour démontrer que $2p - R_1$ est bien le nombre de ces cycles.

On peut construire de façon fort simple des Γ_2 réductibles aux précédents par déformation finie. Soit $\overline{\Gamma}_2$ le lieu qui est fini, du Γ_1 en évidence dans (6), quand y décrit un cercle de grand rayon ζ . Il est clair que $\overline{\Gamma}_2 \sim 0$. On peut considérer, si l'on veut, $\overline{\Gamma}_2$ comme un tube dont l'axe est la position limite de Γ_1 à l'infini. Déformons ζ sans lui faire traverser les a_i jusqu'à ce qu'il coïncide avec les coupures. $\overline{\Gamma}_2$ sera alors devenu le cycle (6), comme on le voit de suite en considérant le lieu de Γ_1 quand y décrit successivement les deux lèvres d'une même coupure.

II. — Généralités sur les périodes et résidus des intégrales doubles.

5. Une période de l'intégrale double

$$(1) \quad \iint R(x, y, z) dx dy \quad (R \text{ fonction rationnelle})$$

en est la valeur étendue à un Γ_2 qui ne rencontre pas les courbes d'infini de l'intégrale ⁽¹⁾. Lorsque $\Gamma_2 \sim 0$, la période est un *résidu* de (1). Soit dans ce cas $M_3 \equiv \Gamma_2$. Si M_3 ne rencontre pas les courbes d'infini, le théorème de Cauchy-Poincaré montre de suite que le résidu est nul. Supposons que M_3 rencontre une de ces courbes, soit C. Puisque Γ_2 ne la rencontre pas, on pourra déformer au besoin légèrement M_3 de manière que $M_3 C$ soit un Γ_1 et non une M_2 . Dans M_3 isolons le voisinage de ce Γ_1 par un cycle $\overline{\Gamma}_2$ infiniment voisin, nécessairement $\sim 0 \pmod{V_2}$. Soit M'_3 ce qui reste de M_3 quand on y supprime toutes ces parties isolées. Ni M'_3 ni ses frontières ne rencontrent les courbes d'infini. De

$$M'_3 \equiv \Gamma_2 - \sum \overline{\Gamma}_2$$

on conclut que le résidu relatif à Γ_2 est égal à la somme de ceux relatifs aux $\overline{\Gamma}_2$. Il suffira donc de considérer ces résidus spéciaux.

On peut donner une construction fort simple des $\overline{\Gamma}_2$. Supposons que C fasse partie de la courbe D_{u_0} appartenant à un certain faisceau linéaire $\{D_u\}$. En particulier, C peut coïncider avec D_{u_0} . Soit ζ un petit circuit entourant u_0 dans son plan, puis considérons la partie de M_3 relative aux u intérieurs à ζ . Sa frontière pourra de toute évidence être prise pour un $\overline{\Gamma}_2$. Ce dernier est le lieu d'un Γ_1 de D_u quand u décrit ζ . Au fond, ce $\overline{\Gamma}_2$ est simplement un tube dont l'axe est la position limite de Γ_1 dans D_{u_0} . On reconnaît là la construction de la fin du n° 4, qui correspond au cas où

$$C = H_\infty, \quad \{D_u\} = \{H_Y\}.$$

$\overline{\Gamma}_2$ n'est autre alors que le cycle fini de ce numéro.

III. — Intégrales doubles de seconde espèce propres et impropres.

6. DÉFINITIONS. — Une intégrale double de type

$$(1) \quad \iint \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) dx dy \quad (U, V, \text{ fonctions rationnelles})$$

est dite *impropre de seconde espèce*. Toute intégrale double de fonction

⁽¹⁾ Lorsqu'une M_2 rencontre uniquement des courbes polaires d'ordre un de R, (1) étendue à M_2 donne lieu à une intégrale convergente (Picard). Toutefois, cette valeur varie avec l'intersection de M_2 et des courbes. L'intégrale étendue à un tel Γ_2 conduirait donc à des périodes variant continûment avec le cycle. Il n'y a, à ce que je sache, aucune application de telles périodes; c'est pourquoi la restriction imposée pour l'instant à Γ_2 , restriction d'ailleurs levée en partie plus loin (n° 7).

rationnelle est de *seconde espèce* quand elle a cette propriété : à chaque courbe d'infini de l'intégrale en correspond une impropre, telle que la différence entre les deux soit finie au voisinage d'un point arbitraire de la courbe (1). Enfin, des intégrales de seconde espèce en nombre quelconque sont *linéairement indépendantes* s'il n'en existe pas de combinaison linéaire à coefficients constants, impropre (sous-entendu ici comme dans la suite « de seconde espèce »).

7. THÉORÈMES. — I. *Une transformation birationnelle ne change pas la forme des intégrales impropres* (2).

En effet, soient x', y', z' les coordonnées courantes sur une surface transformée birationnelle de V_2 . Le théorème est une conséquence immédiate des identités

$$\begin{aligned} \iint \frac{\partial u}{\partial x} dx dy &= \iint \frac{D(U, y)}{D(x, y)} dx dy = \iint \frac{D(U, y)}{D(x', y')} dx' dy' \\ &= \iint \left[\frac{\partial}{\partial x'} \left(U \frac{\partial y}{\partial y'} \right) - \frac{\partial}{\partial y'} \left(U \frac{\partial x}{\partial x'} \right) \right] dx' dy' \end{aligned}$$

et de celles semblables pour $\frac{\partial U}{\partial y}$.

II. *Soient U une fonction rationnelle, Γ_2 un cycle ne rencontrant ni ses courbes d'infini, ni la courbe simple d'intersection, D, de V_2 avec $f'_z = 0$. On a*

$$(2) \quad \iint_{\Gamma_2} \frac{\partial U}{\partial x} dx dy = \iint_{\Gamma_2} \frac{\partial U}{\partial y} dx dy = 0.$$

Le changement de variables $x' = U, y' = y$, pour la première intégrale; $x' = x, y' = U$, pour la seconde, réduisent de suite le théorème en question à celui de Cauchy-Poincaré.

III. *Les intégrales de seconde espèce n'ont pas de résidus.*

Il suffit évidemment de considérer les intégrales impropres et même les intégrales (3). De plus, pour cycles à résidus, on peut se contenter de prendre ceux désignés par $\overline{\Gamma}_2$ au paragraphe 2. On voit alors de suite qu'en déformant convenablement les axes Γ_1 de ces tubes, ils rempliront toutes les conditions de l'énoncé de II, d'où III s'ensuit.

COROLLAIRES. — I. *Lorsque $\Gamma_2 \sim \Gamma'_2$, les périodes correspondantes d'une intégrale de seconde espèce J sont égales.*

(1) Cette définition, légèrement différente de celle de M. Picard, semble quelque peu plus commode. Voir PICARD et SIMART, vol. II, p. 160.

(2) *Ibid.*, p. 161.

II: Pour qu'il y ait un cycle $\sim \Gamma_2$ par rapport auquel J possède une période, il faut et il suffit que Γ_2 coupe toute courbe d'infini de J en un nombre algébriquement nul de points.

Dorénavant, nous n'hésiterons plus à considérer les périodes de J relativement à un Γ_2 coupant les courbes d'infini, pourvu que les conditions du corollaire II soient remplies. Il s'agira alors toujours de la période relative à un cycle convenable $\sim \Gamma_2$.

THÉORÈME IV. — Réciproquement, si J n'a pas de résidus, elle est de seconde espèce ⁽¹⁾.

Soit $g(x, y) = 0$ la projection d'une courbe d'infini C de J, n'appartenant pas à $\{H_y\}$. (Lorsque C est une H_y , il suffit d'échanger les rôles de x et y dans la discussion.) L'intégrale aura la forme

$$\int \int \frac{A}{g^\alpha} dx dy,$$

où A est une fonction rationnelle ni nulle ni infinie sur C.

Si $\alpha > 1$, on remplace J par l'intégrale aux mêmes résidus

$$J + \int \int \frac{1}{\alpha - 1} \frac{\partial}{\partial x} \frac{A}{g_x g^{\alpha-1}} dx dy = \int \int \frac{1}{(\alpha - 1) g^{\alpha-1}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A}{g_x} \right) dx dy,$$

de même type, avec $\alpha - 1$ au lieu de α . En définitive, on peut donc toujours être ramené à $\alpha = 1$.

Transformons alors V_2 birationnellement de manière que la transformée de C sur la nouvelle V_2 (pour laquelle nous garderons les mêmes notations que pour l'ancienne) fasse partie de H_{y_0} . L'intégrale transformée, qui aura toujours les mêmes résidus que la primitive, sera de la forme

$$(3) \quad \int \int \frac{A}{y - y_0} dx dy, \quad A(x, y_0, z) \neq 0.$$

En se reportant à ce que nous avons dit au n° 3 sur la construction des cycles à résidus, on voit que les résidus de (3) sont les périodes de l'intégrale abélienne attachée à H_{y_0} ,

$$(4) \quad 2\pi i \int A(x, y_0, \bar{z}) dx.$$

Réciproquement, toute période de (4) est un résidu de (5), donc aussi de J. Par conséquent, ces périodes sont toutes nulles et (3) se réduit à une

⁽¹⁾ Loc. cit., p. 203.

fonction rationnelle sur C , soit $2\pi i U(x, z)$. On en conclut que

$$\int \int \frac{\Lambda(x, y, z)}{y - y_0} dx dy - \int \int \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{U(x, z)}{y - y_0} \right] dx dy$$

est finie au voisinage d'un point arbitraire de C , ou plutôt de la transformée de C sur la nouvelle V_2 . En retournant à la surface originelle, et en se rappelant la propriété d'invariance des intégrales impropres, on voit que J se conduit comme une intégrale de seconde espèce au voisinage de C . Ceci suffit pour démontrer notre théorème.

Remarque. — De là on conclut aisément à l'invariance des intégrales de seconde espèce sous les transformations birationnelles.

IV. — Étude des périodes d'une classe particulièrement simple d'intégrales doubles.

8. Nous allons faire l'étude des périodes des intégrales

$$(1) \quad \int \int \frac{P(x, y, z) dx dy}{f'_z},$$

où P , ici comme d'ailleurs partout dans la suite, dénote un polynôme adjoint. Cette intégrale a comme propriété essentielle d'être finie à distance finie. Plus généralement, nous nous occuperons aussi des intégrales infinies uniquement sur un certain nombre de courbes H_y .

L'étude de (1) se rattache intimement à celle de l'intégrale abélienne attachée à H_y ,

$$(2) \quad \int \frac{P(x, y, z) dx}{f'_z}.$$

THÉORÈME. — Lorsque P est quelconque, (2) possède $2p + m - 1$ périodes cycliques et logarithmiques complètement arbitraires, c'est-à-dire autant que si le polynôme n'était pas astreint à être un polynôme en y également ⁽¹⁾.

Même démonstration qu'au Chapitre IV, n° 2.

⁽¹⁾ Je dis en effet que

$$(1) \quad \int \frac{P(x, z) dx}{f'_z} \quad (P \text{ polynôme adjoint à } H_y)$$

possède $2p$ périodes cycliques et $m - 1$ logarithmiques à l'infini complètement arbitraires. Les périodes logarithmiques sont bien arbitraires, car les intégrales normales de troisième espèce avec deux points logarithmiques à l'infini sont

Remarque. — Soient $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2p+m-1}$ un système de cycles de H_Y correspondant aux périodes en question. Nulle combinaison des γ ne peut former frontière pour une partie finie de H_Y , car alors la période correspondante de toute intégrale (2) correspondante serait nulle (théorème de Cauchy). Mais la théorie élémentaire des surfaces de Riemann nous apprend qu'il y a au plus $2p+m-1$ cycles linéaires ayant cette propriété. Donc Γ_1 étant quelconque dans H_Y , il y a un cycle

$$\lambda \Gamma_1 + \sum \lambda_i \gamma_i \quad (\lambda \neq 0)$$

formant frontière pour une partie finie de H_Y .

COROLLAIRE. — On peut se donner $2p+m-1$ intégrales (2) à déterminant de périodes $\neq 0$. Les cycles correspondants constituent précisément un système tel que les γ .

9. D'après le paragraphe 4, l'intégrale double (1) possède $R_2-1+2p-R_1$ périodes relatives à des cycles finis

$$(3) \quad \sum \lambda_j \Delta_j + ((H_a)).$$

Soit $\Omega_j(\gamma)$ la période de (2) par rapport à δ_j . On montre, comme au Cha-

toutes de type (1). Il suffit donc de montrer que les intégrales de seconde espèce (1) ont des périodes arbitraires.

Soit $ax+bz+c=0$ une tangente en un point arbitraire B_1 de $H_1, B_2, B_3, \dots, B_m$, ses autres intersections avec la courbe, b_1 l'abscisse de B_1 . Considérons la différence

$$(2) \quad \int \frac{P(x, z) dx}{(ax+bz+c) f'_x} - k \frac{\prod (x-b_i)}{(x-b_1)(ax+bz+c)} \\ = \int \left[\frac{Q(x, z)}{(ax+bz+c)} \right] \frac{dx}{f'_x},$$

où à gauche se trouve l'intégrale normale de seconde espèce relative à B_1 et une constante k telle que le tout soit fini en ce point. La quantité entre crochets à droite est finie à distance finie, donc (PICARD et SIMART, vol. II, p. 10) égale à un polynôme, nécessairement adjoint. [La tangente (*loc. cit.*) est parallèle à $O\gamma$, mais on passe de là au cas plus général par une simple rotation d'axes.] L'intégrale à droite dans (2) est alors de forme (1), aux mêmes périodes que l'intégrale normale. Donc les intégrales de seconde espèce (1) ont leurs périodes cycliques aussi arbitraires qu'une combinaison linéaire d'intégrales normales et d'intégrales de première espèce [elles-mêmes aussi de forme (1)]. Ceci suffit pour démontrer notre affirmation.

pitre IV, n° 16, que la période relative à (3) est égale à (1)

$$\sum \lambda_j \int_a^{a_j} \Omega_j(y) dy.$$

THÉORÈME. — *Les périodes d'une intégrale double (1) arbitraire sont elles-mêmes complètement arbitraires (2).*

En effet, celles de

$$\int \int \frac{\varphi(y) P(x, y, z) dx dy}{f'_z} \quad (\varphi \text{ polynome})$$

sont égales à

$$\sum \lambda_j \int_a^{a_j} \varphi(y) \Omega_j(y) dy.$$

Si notre théorème tombe en défaut, c'est qu'il y a une relation

$$\sum \mu_j \int_a^{a_j} y^k \Omega_j(y) dy = 0,$$

aux μ non tous nuls, satisfaite pour toutes les valeurs de l'entier k . De là on tire de suite

$$\sum \mu_j \int_a^{a_j} \frac{\Omega_j(y)}{y-u} dy = 0,$$

quelle que soit u . Soit $\mu_j \neq 0$. L'accroissement $2\pi i \mu_j \Omega_j$ de cette expression quand u tourne autour de a_j doit être nul, d'où $\Omega_j(y) = 0$. Mais δ_j ne fait pas frontière sur H_y (Chap. II, n° 10), donc, d'après le numéro précédent, la période correspondante d'une intégrale (2) arbitraire ne peut être nulle, contradiction qui démontre notre théorème.

10. THÉORÈME. — *Une intégrale double J infinie uniquement sur des H_y et dont toutes les périodes et résidus sont nuls, est impropre de seconde espèce (3).*

Soient

$$J = \int \int R(x, y, z) dx dy, \quad J_y = \int R dx,$$

(1) Ici, comme au Chapitre IV, n° 15 (voir aussi plus loin, n° 10),

$$\sum \lambda_j \Omega_j(y) = 0.$$

(2) PICARD et SIMART, vol. II, p. 355.

(3) *Ibid.*, p. 365. Le cas considéré ici est un peu plus général, mais la démonstration est la même.

Ω_j la période de J_y relative à δ_j ,

$$J_y^h = \int \frac{P_h(x, y, z)}{f^h_z} dx \quad (h = 1, 2, \dots, 2p + m - 1),$$

les intégrales du corollaire au n° 8, à déterminant de périodes non nul, Ω_{hj} la période de J_y^h relative à δ_j . Pour démontrer le théorème, il suffit d'établir l'existence de fonctions rationnelles $c_h(y)$, $U(x, y, z)$, telles que

$$(4) \quad J_y - \frac{\partial}{\partial y} \sum c_h J_y^h = U(x, y, z).$$

Soient, dans H_y , $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{R_1}$ un système de cycles invariants au nombre maximum de R_1 (Chap. II et III), et soient ω_k, ω_{hk} les périodes de J_y, J_y^h relativement à γ_k . Pour que (4) soit vraie, il faut d'abord que les périodes de l'intégrale au premier membre soient nulles. Il en sera bien ainsi lorsque

$$(5) \quad \sum_1^{2p+m-1} c_h \omega_{hk}(y) = \int_a^y \omega_k(y) dy \quad (k = 1, 2, \dots, R_1),$$

$$(6) \quad \sum_1^{2p+m-1} c_h \Omega_{hj}(y) = \int_{a_j}^y \Omega_j(y) dy \quad (j = 1, 2, \dots, N).$$

En effet, en vertu des relations (6), les périodes relatives aux δ seront nulles. Ceci entraîne l'invariance de toutes les périodes alors que, grâce aux relations (5), les périodes invariantes elles aussi s'évanouissent. Nous allons voir que les relations (5), (6) suffisent pour déterminer des fonctions $c_h(y)$ convenables.

Au cycle fini (3) correspond l'équivalence

$$(7) \quad -((H_y)) \equiv \sum \lambda_j \delta_j.$$

Par suite,

$$\sum_1^N \lambda_j \Omega_{hj}(y) \equiv 0 \quad (h = 1, 2, \dots, 2p + m - 1).$$

Les expressions des périodes de J sont de même type que pour (1). En écrivant qu'elles sont nulles, on obtient

$$-\sum \lambda_j \int_a^{a_j} \Omega_j(y) dy = 0 = \sum \lambda_j \int_{a_j}^y \Omega_j(y) dy.$$

Vu que le nombre de cycles (3) à systèmes de λ distincts est égal à

$$R_2 - 1 + 2p - R_1,$$

ce même nombre de relations (6) est une conséquence des

$$N - (R_2 - 1 + 2p - R_1) = 2p - R_1 + m - 1$$

autres. Jointes aux équations (5), elles nous en donnent juste le nombre $2p + m - 1$ qu'il nous faut pour déterminer les inconnues c , bien entendu pourvu que le déterminant des coefficients ne soit pas nul. Or ce déterminant n'est autre que celui des périodes des J_y^h relativement à autant de cycles dont nulle combinaison ne forme frontière pour une partie finie de H_y , et il ne sera pas nul.

Ainsi nos relations nous fournissent une solution unique aux inconnues c . Remarquons que ω_h , ω_{hk} sont rationnelles, car elles sont uniformes et régulières à l'infini. De plus, $\int \omega_h(y) dy$ l'est également, car ses périodes logarithmiques, s'il y en avait, seraient des résidus de J . Enfin, lorsque y décrit un chemin fermé quelconque, les seconds membres des relations (6) se combinent comme leurs premiers; la vérification en est immédiate. Il suffit alors d'écrire les solutions aux c pour voir que ces fonctions sont uniformes, régulières à l'infini comme les Ω , et partant *rationnelles*.

Sauf à être assuré qu'elle est rationnelle, on pourra déterminer la fonction U . Mais en tout cas

$$(8) \quad R - \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad V = \sum \frac{c_h P_h}{f'_z},$$

d'où l'on conclut que U est certainement algébrique. Outre y , elle peut dépendre de certains paramètres. Maintenant ces derniers fixes, soient $U_1, U_2, \dots, U_s$ ses déterminations pour y donné. Leur moyenne U satisfait tout aussi bien à (8) et elle est de plus rationnelle en x, y, z . Cela revient à démontrer le théorème.

Remarque. — Un point peut prêter à objection dans la démonstration précédente : nous avons admis sans plus que les périodes de J ont les mêmes expressions que si elle était finie à distance finie. Cela ne fait aucun doute tant que, parmi ses courbes d'infini, ne se trouvent pas de H_{a_j} (courbes H_y relatives aux valeurs critiques). Montrons que, même dans ce cas, il n'y a que peu de choses à changer.

Soit δ'_j le cycle de H_y s'accroissant de δ_j quand y tourne autour de a_j (Chap. II, n° 10). Soit Δ'_j le lieu de δ'_j quand y décrit, non plus la coupure aa_j , mais un lacet en différant fort peu (Chap. III, n° 17). Les cycles finis sont réductibles au type

$$\sum \lambda_j \Delta'_j + ((\bar{H}_a)),$$

cycle qui ne rencontre plus les H_{a_j} . Il suffira alors de remplacer partout

les Ω par les périodes relatives aux δ' et les chemins d'intégration aa_j par les lacets; mais, à part cela, le reste de la discussion ira comme auparavant.

V. — Réduction des intégrales de seconde espèce.

Théorème définitif.

11. THÉORÈME. — *Toute intégrale de seconde espèce J est réductible par soustraction d'une intégrale impropre à une intégrale infinie uniquement sur des H_γ .*

Soit $g(x, y) = 0$ la projection d'une courbe d'infini de J n'appartenant pas à H_γ , et soit

$$(1) \quad \iint \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) dx dy$$

telle que la différence entre elle et J soit finie au voisinage de C. Les fonctions rationnelles U, V peuvent être mises sous la forme

$$\frac{\Lambda(x, y, z)}{g^\alpha h(x, y)},$$

où Λ et h sont les polynômes ne s'annulant pas identiquement pour

$$g = 0 \quad (1).$$

On pourra d'ailleurs écrire

$$\frac{1}{g^\alpha h} = \frac{M(x, y)}{g^\alpha k(y)} + \frac{N(x, y)}{h \cdot k(y)} \quad (M, N, k \text{ polynômes}).$$

On en conclut que la différence

$$\frac{\Lambda}{g^\alpha \cdot h} - \frac{\Lambda \cdot M}{g^\alpha \cdot k}$$

est finie au voisinage de C. On pourra donc remplacer U et V par des fonctions semblables, sauf que h ne contient plus x . En soustrayant alors (1) de J, on aura remplacé C comme courbe d'infini par un certain nombre de courbes H_γ . En continuant, on n'aura plus que de telles courbes comme courbes d'infini de l'intégrale réduite. C. Q. F. D.

COROLLAIRE. — J est réductible à la forme

$$\iint \frac{P(x, y, z)}{f_z^2} dx dy.$$

(1) E. PICARD, *Traité d'Analyse*, 3^e édition, vol. I, p. 69.

En effet, nous pouvons d'abord supposer J infinie uniquement sur des H_y . Il existe une intégrale du type précédent aux mêmes périodes que J , soit J' . Pas plus que J , J' ne possède de résidus à l'infini, et, comme elle est finie partout ailleurs, J' est de seconde espèce. $J - J'$ est sans périodes, infinie uniquement sur des H_y , donc impropre, et J est bien réductible à J' .

12. Soit C une courbe algébrique d'ordre v , en position générale par rapport aux axes. Formons une intégrale abélienne attachée à H_y ,

$$\int V dx,$$

à périodes logarithmiques $+i$ relativement aux points de CH_y et $-v$ relativement à l'un des points à l'infini. Les conditions imposées à V sont rationnelles par rapport à y dans leur ensemble. Raisonnant alors comme à la fin du n° 10, on montre que cette fonction rationnelle en x et z l'est en y également. Alors

$$\frac{\partial}{\partial y} \int V dx$$

est de seconde espèce et, partant, réductible à l'aide d'opérations rationnelles par rapport à y (soustraction de fonctions rationnelles bien déterminées) à une intégrale J_y finie à distance finie. On aura

$$J_y = \frac{\partial}{\partial y} \int V dx - U = \int R(x, y, z) dx.$$

Par conséquent,

$$J = \iint R(x, y, z) dx dy = \iint \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) dx dy$$

est une intégrale impropre infinie uniquement sur des H_y , reliée de façon définie à la courbe C . Il s'agit d'en étudier les périodes.

Soit Γ_2 un cycle fini (seule espèce de cycle par rapport auquel J puisse avoir des périodes). Réduisons Γ_2 , à la manière du n° 1, à un cycle ne coupant C qu'en $\pm (\Gamma_2 C)$ points. En se rapportant à la discussion (*loc. cit.*), on voit que l'on peut s'arranger pour que ces points soient tous dans H_{y_0} (y_0 arbitraire) et que de plus Γ_2 et H_{y_0} y aient en commun des petites E_2 entourant les points. En déformant Γ_2 on devra prendre soin d'éviter les H_y d'infini de J , chose facile à faire.

Supprimons les E_2 dans Γ_2 . La M_2 restante aura pour frontières les circuits frontières ζ des E_2 . Puisque J est finie sur nos E_2 ,

$$\left| \int_{\Gamma_2} R dx dy - \int_{M_2} R dx dy \right|$$

peut être rendue aussi petite que l'on veut. Or

$$\int \int_{M_2} = \sum \int_{\zeta} (U dy - V dx) = - \sum \int_{\zeta} V dx,$$

où il est entendu que les ζ sont orientés comme des indicatrices de Γ_2 . Ces circuits en seront alors tout aussi bien pour H_Y (1). On a donc

$$\int \int_{M_2} = - \sum \int_{\zeta} V dx = - (\Gamma_2 C).$$

Telle est aussi la valeur de la période de J relativement à Γ_2 , puisqu'elle en diffère d'aussi peu que l'on veut.

Remarque. — Au lieu d'une courbe unique, prenons-en plusieurs, $C_1, C_2, \dots, C_r$, puis supposons maintenant que

$$\int V dx$$

possède pour points logarithmiques les points $C_k H_Y$ avec une période égale à μ_k . On pourra toujours former J et le même raisonnement donne cette fois, pour sa période relativement à Γ_2 , la valeur

$$- \sum \mu_k (\Gamma_2 C_k).$$

13. Les Γ_2^j ($j = 1, 2, \dots, \rho_0$) du paragraphe 4, ne rencontrant toute courbe algébrique qu'en un nombre algébriquement nul de points, sont tous homologues à des cycles finis

$$\sum \lambda_i \Delta_i + ((H_a)).$$

Toutefois, il y aura encore $\rho - 1$ tels cycles, soient

$$\Gamma_2^h \quad (h = 1, 2, \dots, \rho - 1),$$

rencontrant chacun au moins une courbe en un nombre algébriquement non nul de points. On peut même affirmer que toute combinaison de ces cycles aura toujours cette propriété.

(1) On le démontre en se basant sur ceci : Soient $\Gamma_2, \Gamma_2', \Gamma_2''$, passant par un point A ordinaire pour tous trois, les deux premiers y ayant de plus en commun un circuit ζ passant par A . ζ sera orientable de manière à être une indicatrice (ou bien l'opposée d'une indicatrice) pour les deux cycles à la fois, pourvu que les contributions de A à $(\Gamma_2 \Gamma_2'')$ et $(\Gamma_2' \Gamma_2'')$ soient égales. Ici $\Gamma_2'' = C$, $\Gamma_2' = H_Y$, et ζ entoure A , mais de faciles considérations de continuité montrent que le raisonnement est toujours valide.

Soient $C_1, C_2, \dots, C_\rho$ des courbes indépendantes au sens de M. Severi. De la discussion du paragraphe 1, on conclut que la matrice

$$\|(\Gamma_2^{\rho_0+h} C_k)\| \quad (h = 1, 2, \dots, \rho - 1; k = 1, 2, \dots, \rho)$$

est de rang $\rho - 1$. On peut par conséquent supposer le déterminant

$$|(\Gamma_2^{\rho_0+h} C_k)| \neq 0 \quad (h, k = 1, 2, \dots, \rho - 1).$$

Soit J_k l'intégrale double analogue à celle du numéro précédent relative à C_k ($k \leq \rho - 1$). Le déterminant précédent est celui des périodes de J_k relativement aux $\Gamma_2^{\rho_0+h}$. En se rappelant la nature de ces intégrales, on conclut : *Il y a une intégrale impropre, infinie uniquement sur des H_γ , à périodes par rapport aux $\Gamma_2^{\rho_0+h}$ égales à des constantes quelconques.*

14. THÉORÈME. — *Pour que J soit impropre, il faut et il suffit qu'elle soit sans période par rapport aux Γ_2^j ($j \leq \rho_0$) (cycles coupant toute courbe algébrique en un nombre algébriquement nul de points).*

D'après le corollaire II du n° 7, il y a lieu de considérer les périodes par rapport à nos Γ_2 , quelle que soit l'intégrale double envisagée. En vertu du théorème I (*loc. cit.*), quand J est impropre, les périodes sont bien nulles, de sorte que la condition est effectivement nécessaire. Elle est aussi suffisante. En effet, nous pouvons prendre J sous la forme (1) du paragraphe 4, puisque la réduction s'y fait précisément par soustraction d'une intégrale impropre, donc sans changer les périodes envisagées. Soit alors J', impropre aux mêmes périodes que J relativement aux $\Gamma_2^{\rho_0+h}$, infinie uniquement sur des H_γ . $J - J'$ est sans périodes, infinie uniquement sur des H_γ , donc impropre, et il en est de même de J. C. Q. F. D.

15. THÉORÈME DÉFINITIF. — *Le nombre d'intégrales doubles de seconde espèce linéairement indépendantes est égal au nombre ρ_0 de cycles distincts rencontrant toute courbe algébrique en un nombre algébriquement nul de points.*

En effet, nous pouvons former ρ_0 intégrales distinctes de la forme (1) du paragraphe 4 à résidus tous nuls et à déterminant de périodes par rapport aux Γ_2^j ($j \leq \rho_0$) non nul (n° 9). Ces intégrales sont de seconde espèce, linéairement indépendantes. Enfin, J étant quelconque de seconde espèce, il y aura une combinaison linéaire J' des intégrales précédentes, aux mêmes périodes qu'elle relativement aux cycles ci-dessus. $J - J'$ sans périodes par rapport à eux est impropre (n° 14). Cela veut dire que J dépend des ρ_0 premières intégrales, ce qui démontre le théorème.

COROLLAIRE : FORMULE DE M. PICARD. — De ce qui précède, on tire de

suite cette formule de M. Picard :

$$\rho_0 = R_0 - \rho = 1 + 2R_1 - \rho + 2,$$

où, comme toujours, I désigne l'invariant de Zeuthen-Segre.

16. Le théorème précédent admet une généralisation complète aux V_d . On peut définir pour leurs intégrales k -uples ce que l'on entend par intégrales de seconde espèce linéairement indépendantes, et l'on a alors

THÉOREME. — Soient r le nombre maximum de Γ_k distincts d'une V_d ne rencontrant pas un groupe donné d'hypersurfaces, ρ_0^k le minimum de r quand on envisage tous les groupes possibles. Le nombre d'intégrales k -uples de seconde espèce linéairement indépendantes est égal à ρ_0^k .

VI. — Intégrales simples de troisième espèce.

17. Nous avons déjà envisagé au Chapitre IV les intégrales simples

$$(1) \quad \int U dy + V dx, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y},$$

nous limitant presque exclusivement à celles de première espèce. Une intégrale (1) générale possédera des courbes logarithmiques, c'est-à-dire ayant cette propriété : C étant l'une d'elles, ζ la frontière d'une petite E_2 rencontrant C sans contact, l'intégrale étendue à δ n'est pas nulle. En fait, sa valeur est constante quand ζ est déformé de manière quelconque sans rencontrer les courbes logarithmiques et cette constante est la période logarithmique relative à C . Assujettissons le point (x, y, z) à rester dans une courbe non singulière, D , de l'intégrale. Cette dernière devient alors une intégrale abélienne de troisième espèce attachée à D , aux points logarithmiques CD , avec pour période relativement à chacun d'eux la période même de (1) relativement à C .

L'intégrale (1) est dite de troisième espèce, si elle possède effectivement des courbes logarithmiques.

18. Soient $C_1, C_2, \dots, C_r$ les courbes logarithmiques de (1), μ_k la période relative à C_k . Sur une H , l'intégrale en définit une aux points logarithmiques $C_k H$ avec une période correspondante égale à μ_k . Par suite,

$$(2) \quad \sum \mu_k (C_k H) = 0,$$

d'où immédiatement $r \geq 2$, du moins quand les μ ne sont pas tous nuls, c'est-à-dire quand (1) est effectivement de troisième espèce, comme on le supposera dorénavant. On doit à M. Picard un résultat d'une importance

capitale en géométrie algébrique, dont la démonstration est l'objet de ce paragraphe :

THÉORÈME DE M. PICARD. — *Il existe toujours une intégrale simple dont $\rho + 1$ courbes données sont les seules courbes logarithmiques. Par contre, il existe des systèmes de ρ courbes ou moins qui ne peuvent être les seules courbes logarithmiques d'une intégrale simple de V_2 .*

L'entier ρ est bien entendu le même que nous avons désigné précédemment par cette lettre et que l'on nomme d'ailleurs communément *nombre de M. Picard*.

On trouvera la démonstration de ce théorème dans le Traité de MM. Picard et Simard, vol. II, Chap. IX. Nous allons en démontrer un ici un peu plus général, en suivant en quelque sorte la marche inverse de M. Picard. En effet, après avoir obtenu directement le théorème ci-dessus, l'illustre savant s'en est servi pour dériver certains résultats importants sur les intégrales doubles (*loc. cit.*, Chap. X). Ici, au contraire, nous allons faire usage de ce que nous avons appris sur les intégrales doubles pour en déduire très rapidement le théorème que nous avons en vue.

On consultera d'ailleurs avec grand profit sur cette question un fort important Mémoire de M. Severi (*Mathematische Annalen*, 1906), Mémoire que nous avons déjà eu l'occasion de citer. Les travaux de M. Severi ont éclairé d'un jour nouveau la théorie que l'on doit à M. Picard.

19. En se rappelant la définition de ρ donnée au Chapitre IV, on voit que la proposition de M. Picard se ramène de suite à ce théorème :

THÉORÈME. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une intégrale simple aux courbes logarithmiques $C_1, C_2, \dots, C_r$, est qu'elles soient reliées par une homologie (mod V_2), ou, ce qui revient au même, qu'elles soient dépendantes au sens de M. Severi.*

1° *La condition est nécessaire.* En effet, soient

$$(3) \quad \int U dy - V dx, \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

l'intégrale de l'énoncé, μ_k sa période relative à C_k ⁽¹⁾. Clairement, les périodes de

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) dx dy$$

sont toutes nulles. La remarque à la fin du n° 12 est évidemment appli-

(1) On suppose que les C ne comprennent pas la courbe à l'infini. Cette circonstance un peu gênante peut être évitée par une transformation homographique préalable.

cable. En écrivant que l'expression des périodes ainsi obtenue est nulle, on a

$$(4) \quad \sum \lambda_k (\Gamma_2 C_k) = 0$$

pour tout Γ_2 fini. De plus, (2) montre que ceci est encore vrai pour le cycle H. Or tout Γ_2 dépend de H et des cycles finis. Donc (4) est vraie pour tout Γ_2 . Soient $\Gamma_2^1, \Gamma_2^2, \dots, \Gamma_2^R$ des cycles indépendants quelconques. La matrice

$$\| (\Gamma_2^j C_k) \| \quad (j = 1, 2, \dots, R; k = 1, 2, \dots, r)$$

est de rang $r - 1$ au plus. Puisque ses termes sont tous entiers, il y a des entiers λ non tous nuls tels que

$$\sum \lambda_k (\Gamma_2^j C_k) = \left[\left(\sum \lambda_k C_k \right) \Gamma_2^j \right] = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, R).$$

Par conséquent (Chap. III, n° 18),

$$(5) \quad \sum \lambda_k C_k \sim 0 \pmod{V_2}.$$

C. Q. F. D.

2° *La condition est suffisante.* En effet, (5) étant vérifiée, formons l'intégrale double

$$J = \iint \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) dx dy$$

infinie uniquement sur des H_y et telle que

$$\int V dx$$

ait pour points singuliers logarithmiques les points $C_k H$ avec une période égale à λ_k (n° 12). En vertu de (5) on aura pour tout Γ_2

$$(6) \quad \sum \lambda_k (C_k \Gamma_2) = 0,$$

et en particulier pour H

$$(7) \quad \sum \lambda_k (C_k H) = 0.$$

Donc toutes les périodes de J sont nulles. Par conséquent (n° 10),

$$J = \iint \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} \right) dx dy, \quad \bar{V} = \frac{A(x, y, z)}{\varphi(y) f_z'} \\ (A, \text{ polynome adjoint; } \varphi, \text{ polynome}).$$

On en tire

$$\frac{\partial(U - \bar{U})}{\partial x} + \frac{\partial(V - \bar{V})}{\partial y} = 0,$$

de sorte que

$$(8) \quad \int (V - \bar{V}) dx - (U - \bar{U}) dy$$

est une intégrale simple attachée à notre surface. De la forme de $\bar{V}$ on conclut que (8) n'a, outre les C , que des H_y pour courbes logarithmiques. Soient H_{y_0} l'une d'elles, autre que la courbe à l'infini, $2\pi i\alpha$ la période correspondante de (8). Soustrayons de cette dernière

$$\alpha \log(y - y_0) = \int \frac{\alpha}{y - y_0} dy.$$

L'intégrale restante acquerra au pis aller la seule courbe à l'infini comme courbe logarithmique nouvelle, et aura perdu H_{y_0} . Supprimons ainsi toutes les courbes logarithmiques de même nature. Soit λ la période de l'intégrale finale relativement à la courbe à l'infini. La relation (2) qui lui correspond donne

$$m\lambda + \sum \lambda_k (C_k H) = 0.$$

Par suite, en vertu de (7),

$$m\lambda = 0, \quad \text{donc enfin} \quad \lambda = 0.$$

Ainsi, en réalité, la courbe à l'infini n'est nullement logarithmique pour l'intégrale finale, intégrale qui répond de toute évidence à la question. Ceci achève la démonstration.

NOTE II.

SUR LES MODÈLES DE M. VOLTERRA.

Nous avons eu l'occasion, au Chapitre I, n° 9, de décrire certaines variétés dues à M. Volterra. A propos de ces variétés, le grand savant de Rome a construit des modèles fort curieux. La planche ci-après, que nous devons à son obligeance, a pour but de montrer comment deux variétés, définies de manières fort différentes, peuvent n'en être pas moins homéomorphes, comme nous allons l'expliquer rapidement.

La W_3 de la planche correspond à la valeur 3 de l'entier k (*loc. cit.*). Voici sa construction exacte : Soit, dans l'espace ordinaire, T la région comprise entre quatre sphères dont trois sont extérieures les unes aux autres, mais intérieures à la quatrième. On suppose de plus que les centres des quatre sphères sont dans un même plan Q . Soit maintenant T' la région symétrique de T par rapport à un plan P ne rencontrant pas la plus grande sphère et perpendiculaire à Q . Convenons enfin de considérer comme coïncidant les points frontières de T et T' , qui se correspondent dans la symétrie par rapport à P . L'ensemble de T et T' donne lieu ainsi à la W_3 de M. Volterra.

Il est clair que W_3 est tout aussi bien symétrique par rapport à Q . Coupons la figure par ce plan, et soient T_1, T_2 les deux sections de T , T'_1, T'_2 celles correspondantes de T' . On peut maintenant considérer W_3 comme formée de quatre parties, dont chacune est une E_3 limitée par quatre hémisphères et une partie plane. Les points des frontières planes doivent être liés par la pensée à leurs symétriques par rapport à Q , les autres comme auparavant. La figure 1 illustre nettement cette situation. Les parties bombées appartenant aux sphères extérieures sont derrière le plan de la figure.

Déformons maintenant T_1 en même temps que les parties correspondantes des autres E_3 , de manière à aplanir les grandes hémisphères et à rendre au contraire les parties planes sphériques. On obtient ainsi la situation représentée par la figure 2. Chaque E_3 a pris maintenant la forme d'une hémisphère avec trois cavités dans la partie sphérique. Elles reposent sur le plan de la figure, la partie bombée en avant. Cette fois les parties planes se correspondent par symétrie relativement à P et il en est de même des cavités, alors qu'au contraire les hémisphères se correspondent par symétrie relativement à Q .



Fig. 1.



Fig. 2.



Fig. 3.



Fig. 4.

Joignons les parties planées à celles qui leur correspondent. T_1 et T'_1 donneront lieu ainsi à une sphère de centre dans P , sphère dont la surface contient six cavités deux à deux symétriques relativement à P . De même pour T_2 et T'_2 .

Déformons enfin les cavités comme l'indique la figure 3, puis rejoignons chaque partie à sa symétrique (*fig. 4*). Tout cela revient à changer W_3 en une variété homéomorphe.

La forme finale obtenue est celle d'une région limitée par une sphère à trois anses et de sa symétrique par rapport à Q . Au fond, ce que l'on a fait, c'est de faire coïncider chaque point frontière de T avec son symétrique par rapport à P sur la frontière de T' , quitte à introduire de nouvelles coupures.

ERRATA.

Page 71, dernière formule, *au lieu de* Δ_j , *lire* λ_j .

Page 75, ligne 18, *au lieu de* prendre H_y , *lire* prenons H_y .

Page 76, dernière formule, *au lieu de* $\int_u^{a_j}$, *lire* $\int_a^{a_j}$.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE I. — *Propriétés générales des variétés analytiques.*

	Pages.
I. Premières définitions. Connexions des divers ordres.....	1
II. Intersection des variétés.....	10
III. Intersection des cycles des systèmes fondamentaux. Études de certains invariants qui s'y rattachent.....	13

CHAPITRE II. — *Surfaces algébriques. Étude approfondie des cycles d'une courbe variable dans un faisceau linéaire.*

I. Généralités sur les surfaces algébriques.....	17
II. Étude des cycles d'une courbe variable dans un faisceau linéaire.....	21

CHAPITRE III. — *Topologie des surfaces algébriques.*

I. Réduction à une cellule.....	32
II. Réduction des cycles linéaires à C_n . Relation fondamentale $R_1 = 2q$. Cycles à trois dimensions.....	33
III. Intersection des cycles linéaires et à trois dimensions.....	37
IV. Cycles à deux dimensions.....	38
V. Torsion à une et à deux dimensions.....	42
VI. Intersection des cycles à deux dimensions.....	46
VII. Un exemple : La surface image des couples de points de deux courbes algébriques.....	52

CHAPITRE IV. — *L'Analysis Situs et les systèmes de courbes d'une surface algébrique.*

I. Intégrales simples et doubles de première espèce.....	55
II. Les courbes algébriques et leurs sommes abéliennes.....	62
III. Conditions d'existence des courbes algébriques.....	66
IV. Intégrales de différentielles totales de première espèce.....	73
V. Systèmes linéaires et systèmes continus de courbes algébriques.....	76
VI. Équivalence des courbes d'après M. Severi. Identité avec leur homologie en tant que cycles.....	80
VII. Les cycles algébriques et les nombres ρ , σ	82
VIII. Application aux surfaces images des couples de points de deux courbes algébriques.....	85

CHAPITRE V. — *Variétés algébriques à plus de deux dimensions.*

	Pages.
I. Propriétés topologiques.....	88
II. Les hypersurfaces contenues dans les variétés algébriques.....	100
III. Un théorème sur les cycles algébriques des surfaces d'une V_3 . Application aux courbes des surfaces non singulières de l'espace ordinaire.....	106

CHAPITRE VI. — *L'Analysis Situs et les fonctions abéliennes.*

I. Théorème d'existence des fonctions abéliennes.....	111
II. Propriétés générales des fonctions périodiques et à multiplicateurs.....	118
III. Le nombre ρ pour les variétés abéliennes.....	123

NOTE I. — *Intégrales doubles de seconde espèce et intégrales simples de troisième espèce des surfaces algébriques.*

I. Certaines propriétés des cycles à deux dimensions.....	128
II. Généralités sur les périodes et résidus des intégrales doubles.....	132
III. Intégrales doubles de seconde espèce propres et impropres.....	133
IV. Étude des périodes d'une classe particulièrement simple d'intégrales doubles.....	136
V. Réduction des intégrales doubles de seconde espèce. Théorème définitif.....	141
VI. Intégrales simples de troisième espèce.....	145

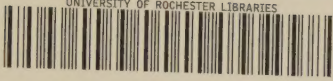
NOTE II. — *Sur les modèles de M. Volterra.....* 149

ERRATA.....	152
-------------	-----



Lefsch
13.35

UNIVERSITY OF ROCHESTER LIBRARIES



3 9087 00081764 5

263423	██████████ MATH. LIBRARY	QA 611
Lefschetz, Solomon		L49a
AUTHOR		
L'analysis situs et la		
TITLE		
géométrie algébrique		

263423	██████████ MATH. LIBRARY	QA 611 L49a
--------	--	-------------------



W9-CMI-615

